Radiación de cuerpo negro, Ley de Stefan-Boltzmann, Ley de Wein.

Grupo 1

13 de octubre de 2021

1. Problema 1

La teoría electromagnética permite mostrar que $p = u/3$ para la radiación electromagnética. Considere a dicha radiación contenida en un cilindro con un pistón que puede deslizar sin fricción, en equilibrio térmico a una temperatura T. El pistón se mueve de manera reversible.

(a) Teniendo en cuenta que el diferencial de la entropía es un diferencial exacto, prueben la ley de Stefan-Boltzmann,

$$u = aT^4$$

(b) Muestren que R $= \sigma T^4$ y $\sigma = a\frac{c}{4}$, donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann.

Resolución item (a): Antes que nada, u es la densidad de energía interna, de manera que la energía es

$$U = uV. \tag{1}$$

Escribimos el diferencial de entropía usando la primera ley y expandiendo a U en su forma diferencial:

$$dS = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}\bigg)_V dT + \frac{1}{T}\left[\frac{\partial U}{\partial V}\bigg)_T + p\right] dV \tag{2}$$

y como dS es un diferencial exacto las derivadas cruzadas segundas deben ser iguales, es decir:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}\bigg)_V\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T}\left[\frac{\partial U}{\partial V}\bigg)_T + p\right]\right) \tag{4}$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} = -\frac{1}{T^2}\left[\frac{\partial U}{\partial V}\bigg)_T + p\right] + \frac{1}{T}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \frac{\partial p}{\partial T}\bigg)_V\right] \tag{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial V}\bigg)_T = T\frac{\partial p}{\partial T}\bigg)_V - p \tag{6}$$

Teniendo en cuenta (1), como u no depende del volumen llegamos a que

$$\frac{\partial U}{\partial V}\bigg)_T = u = T\frac{\partial p}{\partial T}\bigg)_V - p \tag{7}$$

por lo tanto:

$$u = \frac{T}{3}\frac{du}{dT} - \frac{u}{3} \Rightarrow \frac{du}{u} = 4\frac{dT}{T} \tag{8}$$

Y finalmente llegamos a lo que queríamos mostrar:

$$u = aT^4 \tag{9}$$

Resolución item (b): Para llegar a la relación, usamos el resultado del ejercicio 1 de la guía 5 (ejercicio resuelto por Carlos), donde se muestra que la relación entre la densidad de energía interna total $u(T)$ y la energía emitida por unidad de area y unidad de tiempo R, se relacionan de la siguiente forma:

$$R = \frac{c}{4}u \Rightarrow R = \frac{c}{4}aT^4 = \sigma T^4 \tag{10}$$

2. Problema 2

Suponiendo que el Sol irradia como un cuerpo negro esférico de radio $R = 7 \times 10^8 m$, calculen su temperatura y la densidad de radiación dentro de él. La intensidad de la radiación solar en la superficie terrestre (que está a una distancia $d = 1{,}5 \times 10^{11} m$ del Sol) es $W = 1{,}4 \times 10^3 \frac{J}{m^2 s}$ ¿Son realistas sus resultados? Expliquen.

Resolución: Usando la ley de Stefan, que nos dice que la energía por unidad de área por unidad de tiempo (W) para un cuerpo negro es:

$$W = \sigma T^4 \tag{11}$$

tenemos que la potencia emitida por un cuerpo negro esférico es, multiplicando por el área:

$$P_{sol} = 4\pi R_{sol}^2 \sigma T_{sol}^4 \tag{12}$$

Al tratarse de un cuerpo esférico como el sol, podemos considerar que emitirá igual en todas las direcciones por lo que si nos situamos a una distancia d no cambia la potencia que se recibe. Entonces, para calcular qué fracción de esa potencia es recibida (considerando que las dimensiones de la Tierra son lo suficientemente pequeñas con respecto a la distancia al Sol) se puede hacer el siguiente calculo

$$P_{abs} = P_{sol}\frac{\text{área de la tierra}}{\text{área total irradiada}} P_{sol}\frac{4\pi R_T^2}{4\pi d^2} \tag{13}$$

Si suponemos que la tierra se encuentra en equilibrio térmico (su temperatura media), tenemos

$$P_{abs} = P_{emit} = 4\pi R_T^2 W \tag{14}$$

por lo que, igualando en (13) y luego en (12):

$$4\pi R_T^2 W = P_{sol}\frac{R_T^2}{d^2} \Rightarrow P_{sol} = 4\pi R_{sol}^2 \sigma T_{sol}^4 = 4\pi W d^2 \tag{15}$$

$$\Rightarrow T_{sol} = \sqrt[4]{\frac{Wd^2}{\sigma R_{sol}^2}} \tag{16}$$

y sustituyendo por los datos del problema ($\sigma = 5{,}73 \times 10^{-8} \frac{J}{m^2 s K^4}$) obtenemos $T_{sol} \approx 5787K = 5514°C$.

Luego para encontrar la densidad de radiación interna del sol, usamos los resultados del Problema 1, donde

$$u = \frac{4}{c}R = \frac{4}{c}W = \frac{4\sigma}{c}T_{sol}^4 \approx 0{,}86\frac{J}{m^3}. \tag{17}$$

3. Problema 3

La temperatura de la piel de una persona tiene un valor entorno a $T_{piel} = 35°\text{C}$.

(a) Determinen la longitud de onda a la cual la radiación emitida por la piel es máxima.

(b) Estimen la potencia neta irradiada cuando la persona se encuentra en un entorno a $T_{entorno} = 20°\text{C}$. La piel humana posee una emisividad $\epsilon = 0{,}98$ en el infrarrojo y una superficie típica $A \approx 2m^2$ en adultos.

(c) Estimar la pérdida neta de energía que se experimenta durante todo un día. Expresen el resultado en calorías.

Resolución ítem (a): Por la relación de Wein tenemos que:

$$\lambda_m T = b \tag{18}$$

donde λ_m representa la longitud de onda para la cual la radiación de un cuerpo negro es máxima, T es la temperatura absoluta del cuerpo y b es la llamada constante de desplazamiento de Wein, la cual tiene un valor de $b \approx 2898\mu mK$. Utilizando que $T_{piel} = 35°\text{C} = 308K$, la longitud de onda en la cual la radiación emitida por la piel humana es máxima, resulta

$$\lambda \approx 9{,}41\mu m. \tag{19}$$

Resolución item (b): Recordamos la ley de Stefan que nos dice que la energía total emitida, considerando el total de las longitudes de onda, por unidad de área por unidad de tiempo W, también llamada emitancia, es

$$W = \sigma\epsilon T^4 \tag{20}$$

donde ϵ es la emisividad del cuerpo que se define como el cociente entre la energía emitida y la incidente. Por lo tanto, la potencia total neta irradiada, multiplicando a W por el área A, será:

$$P_{neta} = P_{emitida} - P_{absorbida} = A\epsilon\sigma(T_{piel}^4 - T_{ambiente}^4) \tag{21}$$

donde se usó que, como vimos en la teórica, la absorbancia a es igual a la emisividad del cuerpo. Y de esta manera, usando los datos del problema, y $\sigma = 5{,}73 \times 10^{-8}\ \frac{J}{m^2sK^4}$ la potencia neta irradiada será:

$$P_{neta} = 183W \tag{22}$$

Resolución item (c): Basta simplemente con integrar en 1 día la potencia neta irradiada:

$$E_{emitida} = \int_{0hs}^{24hs} P_{neta}\,dt = P_{neta}\Delta t = 183W\ 86400s = 15{,}8 \times 10^6 J = 3776\ kcal. \tag{23}$$