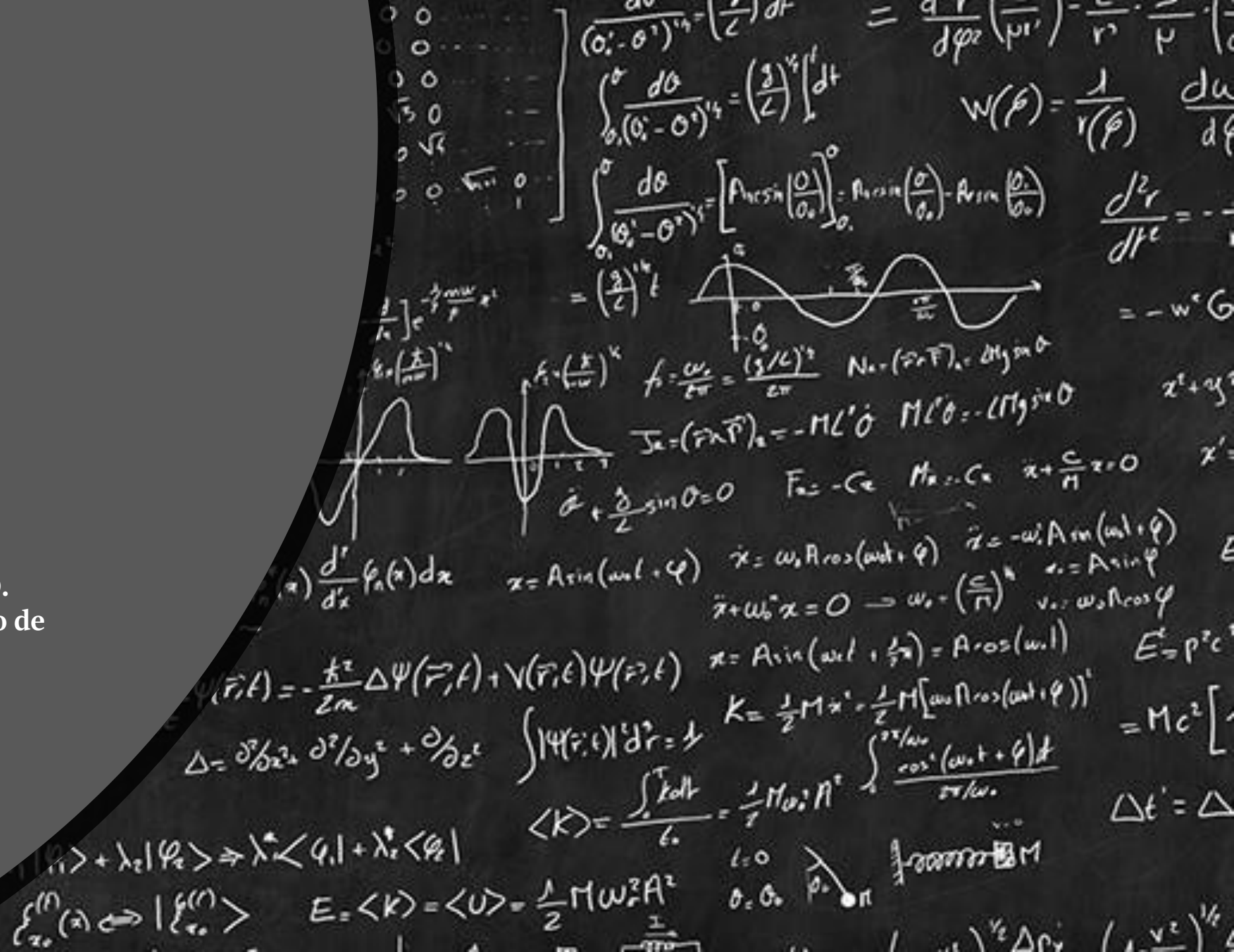


# Física 4

Guía 9: Potenciales 2D-3D.  
Momento angular y átomo de  
hidrógeno. Espín.

(10/11)

2C 2021. Clase Giribet



# Momento angular orbital

- En M. clásico es la cantidad característica que se conserva en problemas con potencial central
- En M. cuántico
  - los problemas centrales son muy importantes (Ej átomo de H)
  - los partículas poseen momento angular intrínseco (spin)
  - surgen por el momento angular fenómenos sin análogo clásico (Ej: cuantización espacial)

CLÁSICAMENTE

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

CUÁNTICAMENTE

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$$

$$\begin{cases} \hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar \left[ y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right], \\ \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \\ \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \end{cases}$$

donde hemos visto en la guía 7 que  $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$  → SÍMBOLO DE LEVI CIVITA

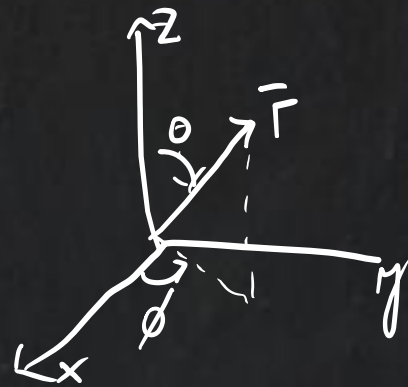
Nos va a convenir en este caso utilizar coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= +i\hbar \left( \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left( \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \hat{L}^2 &= -\hbar^2 \left( \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right)\end{aligned}$$

NOTAR QUE

$\hat{L}^2$  y cada una de sus componentes / CONMUTAN:  $[\hat{L}^2, L_i] = 0$



Por lo tanto  $\hat{L}^2$  y  $L_z$  tienen los mismos autofunciones / autoestados

Autofunciones de momento angular en sup. de coordenadas  $\rightarrow Y_l^m(\theta, \phi)$

$$\begin{cases} \hat{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \\ \hat{L}_z Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar m Y_l^m(\theta, \phi) \end{cases}$$

$l$ : n.º cuántico orbital

$m$ : n.º cuántico magnético

• Para un valor fijo de  $l$ ,  $m$  puede tomar  $2l+1$  valores:  $m = -l, -l+1, \dots, 0, l-1, l$

Ej:

| $l$ | MOMENTO ANGULAR ORBITAL $\rightarrow \hbar \sqrt{l(l+1)}$ | $m$             |
|-----|-----------------------------------------------------------|-----------------|
| 0   | 0                                                         | 0               |
| 1   | $\sqrt{2} \hbar$                                          | -1, 0, 1        |
| 2   | $\sqrt{6} \hbar$                                          | -2, -1, 0, 1, 2 |

• Ortonormalidad de armónicos esféricos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi)^* Y_l^m(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} = \langle Y_{l'}^{m'}, Y_l^m \rangle$$

NOTACIÓN: producto interno de  $f$  y  $g$ :  $\int f^*(q) g(q) dq = \langle f(q), g(q) \rangle$

• Los  $Y_l^m$  se escriben en términos de los  $P_l^m$

Ej:  $Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ ;  $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$ ;  $Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin(\theta)$

$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2(\theta) - 1)$ , etc.

Ejemplo: Sea  $\Psi(\theta, \phi) = N \sin(\theta) \cos(\phi)$

(a) Hallar  $\langle \hat{L}^2 \rangle$  para este estado

(b) Si se mide  $\hat{L}_z$ , ¿cuáles valores podrían obtenerse y con qué probabilidad?

- Expresamos  $\Psi$  en términos de  $Y_l^m$  (autofunciones de  $\hat{L}^2$  y  $\hat{L}_z$ )

-  $\phi$  solo aparece en exponentes complejos

$\Psi(\theta, \phi) \stackrel{\text{Fórmula de Euler}}{=} N \sin(\theta) \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} = \frac{N}{2} \left[ \sin(\theta) e^{i\phi} + \sin(\theta) e^{-i\phi} \right]$

$$\Psi(\theta, \phi) = \frac{N}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left[ -Y_1^{+1}(\theta, \phi) + Y_1^{-1}(\theta, \phi) \right]$$

- *Per normalization*

$$\underbrace{\iint \psi^*(\theta, \phi) \psi(\theta, \phi) d\Omega}_{\langle \psi(\theta, \phi), \psi(\theta, \phi) \rangle} = 1 = \left(\frac{N}{2}\right)^2 \frac{8\pi}{3} \left[ (-1)^2 \underbrace{\langle Y_1^{+1}, Y_1^{+1} \rangle}_{=1} - \underbrace{\langle Y_1^1, Y_1^{-1} \rangle}_{=0} - \dots \right]$$

$$\dots - \underbrace{\langle Y_1^{-1}, Y_1^1 \rangle}_{=0 \text{ (}\neq l, m \text{)}} + \underbrace{\langle Y_1^{-1}, Y_1^{-1} \rangle}_{=1} \Big] = \frac{N^2}{4} \frac{8\pi}{3} \cdot 2 = \frac{4\pi}{3} N^2 \stackrel{\text{Per normalization}}{=} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{N = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -Y_1^1(\theta, \phi) + Y_1^{-1}(\theta, \phi) \right]}$$

$$\textcircled{a} \quad \hat{L}^2 \psi(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ - \underbrace{\hat{L}^2 \gamma_1^1}_{\substack{\hbar^2 l(l+1) \gamma_l^m \\ \hookrightarrow \hbar^2 2 \gamma_1^1}} + \hat{L}^2 \gamma_1^{-1} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 2\hbar^2 (-\gamma_1^1) + 2\hbar^2 \gamma_1^1 \right]$$

$$\hat{L}^2 \psi(\theta, \phi) = 2\hbar^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} [-\gamma_1^1 + \gamma_1^{-1}]}_{\psi(\theta, \phi)}$$

$$\langle \hat{L}^2 \rangle_\psi = \iint \psi^*(\theta, \phi) \underbrace{\hat{L}^2 \psi(\theta, \phi)}_{2\hbar^2 \psi(\theta, \phi)} d\Omega = 2\hbar^2 \iint \psi^* \psi d\Omega = 2\hbar^2$$

⑥ Si se mide  $L_z$ , ¿qué probabilidad obtenemos?

Si tenemos  $\psi = \sum_i C_i \chi_i$  donde  $\chi_i$  es autovector de un op  $\hat{A}$  con autovalor  $a_i$ ,

$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \sum_i p_i a_i$  donde  $p_i = |C_i|^2$ : prob. de obtener el autovalor  $a_i$

$$\Psi(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -Y_1^1(\theta, \phi) + Y_1^{-1}(\theta, \phi) \right]$$

En este caso: podemos obtener el modo  $\hat{L}_z$

$$\begin{aligned} &\rightarrow +\hbar \text{ con prob } \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \\ &\rightarrow -\hbar \text{ con prob } \left( \frac{+1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

8. Un rotador rígido tiene momento de inercia  $I$  y velocidad angular  $\omega$ .

- (a) Encuentre el hamiltoniano del rotador. ¿Qué constantes de movimiento tiene el sistema?
- (b) Encuentre los autoestados del rotador y los posibles valores de la energía de rotación.
- (c) La distancia de equilibrio entre los protones de una molécula de  $H_2$  es  $r_0 = 0.74 \text{ \AA}$ . Considerándola como un rotador rígido, encuentre la energía de rotación del primer nivel excitado ( $l = 1$ ).
- (d) ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación emitida para la transición de  $l = 1$  a  $l = 0$ ?

MEC. CLÁSICA

Energía rotacional de una molécula diatómica

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$$

Como  $L = I\omega$

- Variables canonicas
  - El SR es rotacional el cuerpo
  - La dirección de rotación está en  $Z$

• Constantes de mov: Por el teorema de Ehrenfest  $\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle$

$\rightarrow$  Son constantes de mov.  $\langle \hat{L}^2 \rangle, \langle \hat{L}_z \rangle, \langle \hat{L}_x \rangle, \langle \hat{L}_y \rangle$

MEC. CUÁNTICA

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \frac{\hat{L}^2}{I}$$

$\hat{A}$  no depende explícitamente de  $t$

(b) Autovalores y autoenergías

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \frac{\hat{L}^2}{I} \Rightarrow \hat{H} Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{1}{2I} \hat{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{1}{2I} \hbar^2 l(l+1) \underbrace{Y_l^m(\theta, \phi)}_{\text{AUTOESTADOS DE } \hat{H}}$$

$$\Rightarrow E_l = \left( \frac{1}{2I} \hbar^2 l(l+1) \right) \text{ AUTOENERGÍAS}$$

• Hay degeneración en  $m$  (B. Energía constante de rotación que se rompe por ej. con un campo eléctrico  $\rightarrow$  Efecto Stark)

(c)  $\Gamma_0 = \frac{1}{2} \mu r_0^2$

$H \ominus \boxed{H_2}$

$I = \mu r_0^2$

$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2$

Como así  $m_1 = m_2 = m_H \Rightarrow I = \frac{m_H}{2} r_0^2 \Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{m_H r_0^2} l(l+1)$

Ejercicio: Seguir el problema

## Partícula en un potencial central

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r), \text{ donde en esféricas:}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)}_{\hat{L}^2}$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2m r^2} \hat{L}^2 + V(r)$$

- Como las tres componentes de  $\vec{L}$  conmutan con  $\hat{L}^2 \Rightarrow$  conmutan con  $\hat{H}$   
 $\hookrightarrow \hat{L}^2, \hat{L}_z$  y  $\hat{H}$  tienen autofunciones en común.

Hay que resolver:

$$\hat{H} \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi)$$

$$\hat{L}^2 \psi(r, \theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) \psi(r, \theta, \phi)$$

$$L_z \psi(r, \theta, \phi) = \hbar m \psi(r, \theta, \phi)$$

→ Tenemos 3 n°s cuánticos

$m \rightarrow$  Energía,  $\uparrow$

$l \rightarrow \hat{L}^2$

$m \rightarrow L_z$

Átomo de hidrógeno

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}, \quad r: \text{distancia entre } e^- \text{ y } p$$



Separando variables y resolviendo se pueden obtener

las soluciones del problema

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = \underbrace{R_{nl}(r)}_{\text{FUNCIÓN RADIAL}} Y_l^m(\theta, \phi)$$

Para mostrar  
son  
consecutor.

• Aufhebung:  $E_m = -\frac{m e^4}{2\hbar^2 m^2} = -\frac{E_1}{m^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{m^2} \begin{cases} m > l \\ -l < m < l \end{cases}$

Notar que hay degeneración en  $l$  y  $m$ .

• Aparece  $e$  que es la carga del  $e^-$ , y así como escribimos el  $V(r)$ , usamos unidades gaussianas  $\rightarrow e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  (esu: UNIDAD ELECTROSTÁTICA DE CARGA)

$\downarrow$

$e \neq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  (eso es en el SI)

• ÁTOMO HIDROGENOIDE: núcleo de carga  $Ze$  y un  $e^-$

Es lo mismo que lo de el átomo de H pero  $e^2 \rightarrow Ze^2$

Ej:  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$ , etc.



- Coefficient de la fonction d'onde se normalise par rapport à

$$\iiint |\Psi_{nlm}(r)|^2 \underbrace{d^3r}_{r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \int_0^\infty r^2 |R_{nl}(r)|^2 dr = 1 \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y_l^m(\theta, \phi)|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 1 \end{cases}$$

- Ex: de fonctions radiales

$$\begin{aligned} R_{10}(r) &= \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} 2e^{-\frac{Zr}{a_0}} \Bigg\} \text{1er niveau} \\ \\ R_{20}(r) &= \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{\frac{3}{2}} 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{Zr}{a_0} \right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \\ R_{21}(r) &= \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{Zr}{a_0} e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \Bigg\} \text{2do niveau} \\ \\ R_{30}(r) &= \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{\frac{3}{2}} 2 \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{Zr}{a_0} + \frac{2}{27} \left( \frac{Zr}{a_0} \right)^2 \right] e^{-\frac{Zr}{3a_0}} \\ R_{31}(r) &= \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{Zr}{a_0} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{Zr}{a_0} \right) e^{-\frac{Zr}{3a_0}} \\ R_{32}(r) &= \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \left( \frac{Zr}{a_0} \right)^2 e^{-\frac{Zr}{3a_0}} \Bigg\} \text{3er niveau} \end{aligned}$$

- Por razones históricas (espectroscopia) cada valor de  $l$  tiene asociado una letra latina:

$$\begin{array}{lcl} \text{Ej} & l=0 & \longleftrightarrow s \\ & l=1 & \longleftrightarrow p \\ & l=2 & \longleftrightarrow d \end{array} \text{ etc.}$$

El valor de  $m$  se pone como subíndice

$$\left. \begin{array}{l} m=1 \\ l=1 \\ m=-1 \end{array} \right\} \boxed{1p_{-1}}$$

- $|\psi_{m\ell m}|^2 d^3r = |\psi_{m\ell m}|^2 r^2 dr d\Omega \rightarrow$  Probabilidad de encontrar al  $e^-$  entre  $\bar{r}$  y  $\bar{r} + d^3\bar{r}$

↓ INTEGRAMOS ANGULARMENTE

$$\iint |R_{m\ell}(r)|^2 |Y_{\ell}^m|^2 r^2 d\Omega dr = |R_{m\ell}(r)|^2 r^2 dr \rightarrow \text{Prob de encontrar al } e^- \text{ en un corchete esférico de espesor } dr$$

$$\Rightarrow \boxed{P(r) = r^2 |R_{m\ell}(r)|^2} \text{ densidad radial de probabilidad}$$

9. Sea un átomo de hidrógeno en su estado fundamental

- Calcular la probabilidad de encontrar al electrón a una distancia mayor que  $a_0$  ( $a_0 \approx 0.529167 \text{ \AA}$  es el radio de Bohr) del núcleo.
- Cuando este electrón está a una distancia  $2a_0$  del núcleo toda su energía es potencial. De acuerdo con la física clásica este electrón no puede exceder esa distancia. Cuánticamente, ¿cuál es la probabilidad de hallar al electrón a  $r > 2a_0$ ?
- El radio de un protón es del orden de  $10^{-13} \text{ cm}$ . Calcule la probabilidad de que, en el átomo de hidrógeno, el electrón esté dentro del protón.

### ESTADO FUNDAMENTAL

$$\psi_{100}(r) = \underbrace{R_{10}(r)}_{\substack{\uparrow \\ m_l=0}} \underbrace{Y_0^0(\theta, \phi)}_{\substack{\uparrow \\ m=0}} = \underbrace{2a_0^{-3/2} e^{-r/a_0}}_{=1}$$

¿Está normalizado  $\psi_{100}(r)$ ?

$$\iiint |\psi_{100}(r)|^2 d^3r = \left[ \int_0^\infty r^2 |R_{10}(r)|^2 dr \right] \underbrace{\int |Y_0^0(\theta, \phi)|^2 d\Omega}_{=1}$$

$$= \int_0^\infty 4a_0^{-3} r^2 e^{-2r/a_0} dr = 4a_0^{-3} \int_0^\infty r^2 e^{-\alpha r} dr = 4a_0^{-3} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left( \int_0^\infty e^{-\alpha r} dr \right)$$

$$= 4a_0^{-3} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left[ \frac{e^{-\alpha r}}{-\alpha} \right]_0^\infty = 4a_0^{-3} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha} \right) = 4a_0^{-3} \frac{2}{\alpha^3} = \frac{8}{a_0^3} \frac{1}{(2/a_0)^3} = 1 \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{a} \quad P(r \geq a_0) &= \int_{a_0}^{\infty} |R_{10}(r)|^2 r^2 dr = \int_{a_0}^{\infty} 4a_0^{-3} r^2 e^{-2r/a_0} \\
 &= 4a_0^{-3} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left[ \frac{e^{-\alpha r}}{-\alpha} \right]_{a_0}^{\infty} = 4e^{-2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \right] \approx 0,6766
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(r \leq a_0) = 1 - P(r \geq a_0) \approx 0,3233.$$

¿Cómo definimos el tamaño del átomo de H?

10. Calcular  $\langle r \rangle$  y  $\langle r^{-1} \rangle$  para el estado fundamental de un átomo hidrogenoide de número atómico  $Z$ .  
Calcular  $\langle V(r) \rangle$  para ese estado.

(yo lo voy a resolver para el átomo de H:  $Z=1$ )

$$\psi(r) = R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) \rightarrow \text{lo mismo de antes}$$

$$\langle r^k \rangle_{100} = \int_0^\infty r^k r^2 |R_{10}(r)|^2 dr = \int_0^\infty r^{k+2} |R_{10}|^2 dr$$

$$\langle r^k \rangle_{100} = 4a_0^{-3} \int_0^\infty r^q e^{-qr} dr = 4a_0^{-3} (-1)^q \frac{d^q}{d(q)^q} \left( \frac{1}{q} \right)$$

$$\langle r^k \rangle = \frac{4}{a_0^3} (-1)^q \frac{(-1)^q q!}{q^{q+1}} = \boxed{\frac{(k+2)!}{2^{k+1}} a_0^k = \langle r^k \rangle_{100}} \quad \leftarrow q=k+2$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{q} \downarrow \textcircled{1} \\ \frac{1}{q^2} \downarrow \textcircled{2} \\ (-1)^2 \frac{2}{q^3} \downarrow \textcircled{3} \\ (-1)^3 \frac{3 \cdot 2}{q^4} \end{array}$$

$$n=1 \Rightarrow \langle r \rangle = \frac{3!}{2^2} a_0' = \frac{3}{2} a_0 > a_0$$

$$n=-1 \Rightarrow \langle r^{-1} \rangle = a_0^{-1} \Rightarrow \langle \hat{V} \rangle_{100} = -e^2 \langle \frac{1}{r} \rangle = -\frac{e^2}{a_0}$$

11. Encontrar los valores más probables de  $r$  (en unidad de  $a_0$ ) para el electrón del átomo de hidrogeno en el estado  $2s$ .

Valor más probable  $\rightarrow$  Hay que maximizar  $P(r) = r^2 |R_{ne}(r)|^2$

ADICIONAL (a la guía)

Suponer un estado para el átomo de H dado por:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{100} + A \psi_{211} + \frac{1}{\sqrt{8}} \psi_{300}$$

(a) Hallar  $A$ ; (b) Calcular  $\langle \hat{H} \rangle$ ,  $\langle \hat{L}^2 \rangle$ ,  $\langle \hat{L}_z \rangle$

(c) ¿Qué valores se pueden medir para estas observables y con qué probabilidad?

TAREA  
(para  $\hat{L}^2$  y  $\hat{L}_z$ )

(d) Hallar  $\psi$  a tiempo cualquiera; repetir (b) y (c)  $\rightarrow$  TAREA

(a) NORMALIZAMOS  $\psi(\vec{r})$ :  $\iiint \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = \langle \psi(\vec{r}) | \psi(\vec{r}) \rangle = 1$

$$\Rightarrow 1 = \langle \psi | \psi \rangle = \frac{1}{2} \overbrace{\langle \psi_{100} | \psi_{100} \rangle}^{=1} + A^2 \overbrace{\langle \psi_{211} | \psi_{211} \rangle}^{=1} + \frac{1}{8} \overbrace{\langle \psi_{300} | \psi_{300} \rangle}^{=1} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 8} \overbrace{\langle \psi_{100} | \psi_{300} \rangle}^{=0} + \dots \text{(COJAS QUE DAN CERO)}$$

$$1 = \langle \varphi, \varphi \rangle = \frac{1}{2} + A^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{6}{16} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{3}{8}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{1r} + \sqrt{\frac{3}{8}} \psi_{2r} + \frac{1}{\sqrt{8}} \psi_{3r}}$$

⑥-⑦ En conjunto

$\langle \hat{H} \rangle$ ? Tener una c.l. de autovalores de  $\hat{H}$  con autovalores  $E_n = -\frac{E_1}{n^2}$

$\hat{H} \psi_{1r} = -E_1 \psi_{1r}$  ; Podemos medir  $-E_1$  con probabilidad  $\frac{1}{2}$

$\hat{H} \psi_{2r} = -\frac{E_1}{4} \psi_{2r}$  ; Podemos medir  $-\frac{E_1}{4}$  con prob.  $\frac{3}{8} = \left| \sqrt{\frac{3}{8}} \right|^2$

$\hat{H} \psi_{3r} = -\frac{E_1}{9} \psi_{3r}$  ; Se puede medir  $-\frac{E_1}{9}$  con prob  $\frac{1}{8}$ .

$$\langle \hat{H} \rangle_\psi = \sum_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prob de medir el valor } E_i}}{h_i} E_i = -E_1 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{E_1}{4}\right) \left(\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{E_1}{9}\right) \left(\frac{1}{8}\right) = \left[ -E_1 \frac{31}{288} \right] = \langle \hat{H} \rangle_\psi$$

Seguir el problema...