Guía 5: Cuerpo negro, efecto fotoeléctrico, efecto Compton

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríban a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 7: Usando la hipótesis de Planck para calcular el valor medio de la energía y el resultado del problema anterior, calcule la densidad de energía $u_\nu(T)\,d\nu$. Compare con lo que obtendría usando equipartición. Calcule los límites de baja y de alta frecuencias y corrobore que obtiene las leyes de Rayleigh-Jeans y Wien.

Solución:

Para una distribución continua de energía tenemos que:

$$< \varepsilon_\nu >= \int_0^\infty \varepsilon_\nu P(\varepsilon_\nu) d\varepsilon_\nu \tag{1}$$

Planck propuso discretizar la distribución proponiendo:

$$\varepsilon_\nu = nh\nu \tag{2}$$

De esta manera se tiene lo siguiente:

$$< \varepsilon_\nu >= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A\; nh\nu e^{-\beta nh\nu}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A e^{-\beta nh\nu}} = -\frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\ln\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(Ae^{-\beta nh\nu}\right)^n\right]\right\} \tag{3}$$

donde hemos definido: $\beta = \dfrac{1}{kT}$ y la identidad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{4}$$

Por lo que queda:

$$< \varepsilon_\nu >= -\frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\ln\left[\frac{1}{1-e^{-\beta h\nu}}\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\ln\left[1-e^{-\beta h\nu}\right]\right\} = \frac{h\nu e^{-\beta h\nu}}{1-e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{5}$$

Límite de alta frecuencia: $h\nu >> kT$

$$< \varepsilon_\nu >= \lim_{h\nu >> kT} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \to 0 \tag{6}$$

lo que implica que $u_\nu \to 0$ Límite de baja frecuencia: $h\nu << kT$

$$< \varepsilon_\nu >= \lim_{h\nu >> kT} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \to kT \tag{7}$$

equivale al resultado clásico de equipartición de la energía.

Ley de Rayleigh-Jeans, si $\lambda >> \dfrac{hc}{kT}$

$$U_\nu(T) = 8\pi\frac{\nu^3}{c^3}h\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \approx 8\pi\frac{c}{\lambda^4}kT \tag{8}$$

Hemos usado que $c = \lambda\nu$

Ley de Wien

$$U_\lambda(T) = 8\pi \frac{hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \tag{9}$$

se maximiza respecto de λ con el cambio de variables $x = \dfrac{hc}{\lambda kT}$ y da $x \approx 5$