Guía 6: Scattering de Rutherford, átomo de Bohr, postulados de De Broglie

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríban a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 14: Considere el paquete de ondas descripto por la función $\Phi(k) = A \exp\left[-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2\right]$.
a) Calcular A para que la función está normalizada.
b) Calcular $|\psi(x,0)|^2$
c) Calcular el valor medio de la coordenada x, el de la coordenada p y el producto $\Delta x \Delta p$.

Solución:
Por ahora el primer item no lo vamos a comentar, lo que sigue, se basa en el siguiente apunte:
https://www.famaf.unc.edu.ar/~gcas/cuantica1/clases/node10.html

a) Explicitamos que es la transformada de Fourier en una dimensión:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\phi(k) e^{i(kx-\omega t)} \tag{1}$$

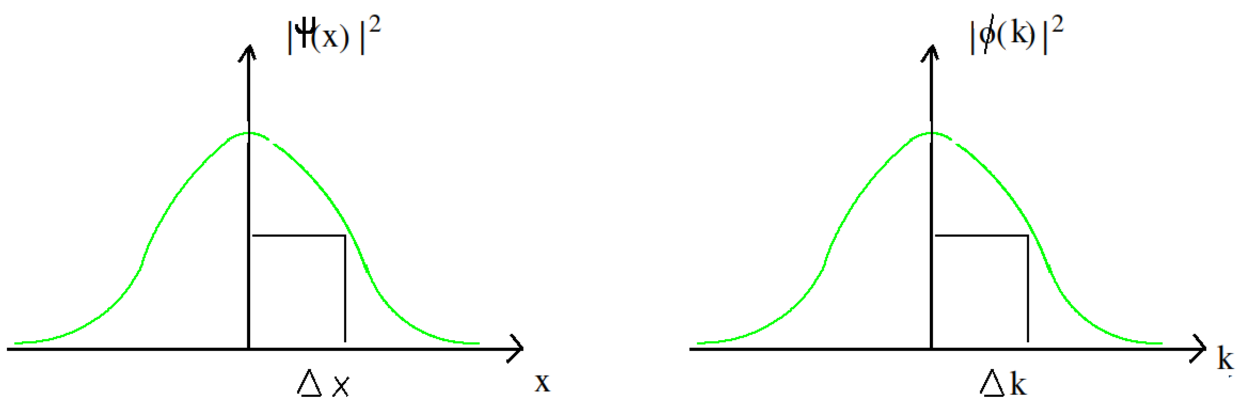
a $t = 0$, logicamente:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\phi(k) e^{ikx} \qquad \text{a su vez...} \qquad \phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\Psi(x,0) e^{-ikx} \tag{2}$$

es decir que si conocemos una, conocemos la otra.
No cambia mucho si hacemos $x_0 \neq 0$ y $k_0 \neq 0$:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\phi(k) e^{i(k-k_0)x} \qquad \text{a su vez...} \qquad \phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\Psi(x,0) e^{-ik(x-x_0)} \tag{3}$$

Como siempre, la distribución lejos del punto en cuestión decae a cero.



$|\Psi(x,0)|^2$ es la densidad de probabilidad de encontrar una partícula alrededor de $x_0 = 0$ en un intervalo Δx.
Lo mismo con $|\phi(k)|^2$ en un entorno de $k_0 = 0$.
Como sabemos si integramos en todo el espacio de interés debe ser igual a uno.

Es útil tener en cuenta la siguiente expresión:

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \tag{4}$$

Yendo al problema en sí , normalizamos:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dk\phi^*(k)\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A^2 \exp\left[-\frac{a^2(k-k_0)^2}{2}\right] \tag{5}$$

Para integrar usamos la identidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a e^{\frac{(x-b)^2}{2c^2}} dx = a|c|\sqrt{2\pi} \tag{6}$$

La constante de adimensionalización queda:

$$\boxed{A^2 = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}}} \tag{7}$$

Puede ser conveniente en algún momento escribir: $a = \dfrac{1}{\Delta k}$

b) Ahora trabajamos con $\Psi(x,0)|$:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ A \exp\left[-\frac{a^2(k-k_0)^2}{4}\right] e^{ikx} \tag{8}$$

Trabajamos el exponente para llevarlo a una forma gaussiana:

$$-\frac{a^2(k-k_0)^2}{4} + ikx = \frac{-k^2 - k_0^2 + 2kk_0 + ikx4\Delta k^2}{4\Delta k^2} = \frac{-k^2 + 2k(k_0 + 2ix\Delta k^2) - k_0^2}{4\Delta k^2} \tag{9}$$

Si bien no es inmediato, completamos "cuadrados" y queda:

$$-\frac{(k - k_0 - 2ix\Delta k^2)^2}{4\Delta k^2} + ik_o x - x^2\Delta k^2 = -\frac{(k-b)^2}{2c^2} + ik_o x - x^2\Delta k^2 \tag{10}$$

donde elegimos que $b = k_0 + 2ix\Delta k^2$ y $c = \sqrt{2}\Delta k$.

Hecho esto volvemos al cálculo de $\Psi(x,0)$

$$\Psi(x,0) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 x} e^{-x^2\Delta k^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left[-\frac{(k-b)^2}{2c^2}\right] = A e^{ik_0 x} e^{-x^2\Delta k^2}\sqrt{2}\Delta k \tag{11}$$

En definitiva:

$$\boxed{|\Psi(x,0)|^2 = A^2 e^{-2x^2\Delta k^2} 2\Delta k^2} \tag{12}$$

c) Vamos a calcular las magnitudes pedidas:

$$\Delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2} \tag{13}$$

Por empezar:

$$< x > = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x|f(x,t)|^2 \qquad < x^2 > = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2|f(x,t)|^2 \tag{14}$$

Para una cierta función $f(x,t)$, en nuestro caso, $< x >$ queda una función impar, de manera que:

$$< x > = 0 \tag{15}$$

En cambio, la otra requiere un poco mas de trabajo:

$$< x^2 > = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2 A^2 e^{-2x^2\Delta k^2} 2\Delta k^2 = \frac{A^2}{\sqrt{2}\Delta k} \int_{-\infty}^{\infty} ds\ s^2 e^{-s^2} \tag{16}$$

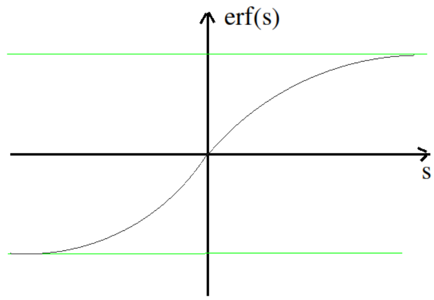
$$< x^2 >= \frac{A^2}{\sqrt{2}\Delta k}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{4}\text{erf}(s) - 2se^{-s^2}\right\}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{A^2}{\sqrt{2}\Delta k}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{17}$$

$s = \sqrt{2}x\Delta k$

El segundo término en las llaves es cero, pero el primero es la función error que se define como:

$$\text{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{-t^2}dt \tag{18}$$

Cualitativamente su gráfico es:



De manera similar se procede con Δk.

$$< k >= 0 \tag{19}$$

Vamos con el mas otro...

$$< k^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} dk A^2 k^2 \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{2\Delta k^2}\right] = A^2\sqrt{2\pi}\Delta k^3 \tag{20}$$

Si se hace ahora:

$$\Delta x \ \Delta k = \frac{1}{2} \tag{21}$$

el paquete gaussiano es el de mínima incerteza, en general vale la desigualdad, resta usar el hecho que:

$$\Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar} \tag{22}$$