Guía 8: Oscilador armónico, Pozos de Potencial en una dimensión

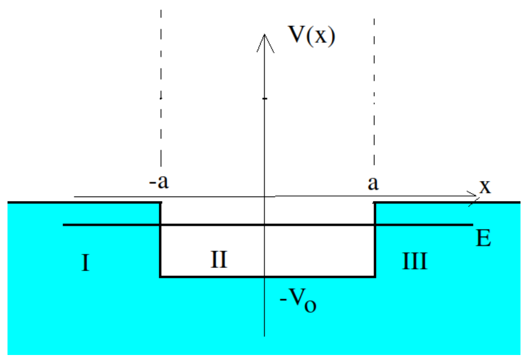
Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríban a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 3: Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & 0 < |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

con $a > 0$. Encuentre las autofunciones de H y una ecuación para sus autovalores para $E < 0$. Compare con el problema anterior.

Solución:



Tenemos tres regiones al igual que el caso $E > 0$. En ese caso las soluciones son ondas planas pero varía k según donde se encuentre. Claramente por simetría $k_I = k_{III}$. En definitiva:

$$k_I = i\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} \tag{1}$$

$$k_{II} = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}} \tag{2}$$

Siendo la solución

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_+e^{ik_Ix} + A_-e^{-ik_Ix} = Ae^{k_Ix} & -\infty < x < -a \\ Be^{ik_{II}x} + Ce^{-ik_{II}x} & -a < x < a \\ De^{-k_Ix} & a < x < \infty \end{cases}$$

En las regiones I y III se pueden tomar las exponenciales imaginarias, pero dado que $E < 0$, terminan quedando exponenciales reales, una creciente y otra decreciente. Nos quedamos con las exponenciales decrecientes porque **las autofunciones están localizadas en el espacio**.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \Psi(x) = 0 \tag{3}$$

Se debe plantear condiciones de continuidad para Ψ y su derivada $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ en los empalmes de cada región.

$\boxed{x=-a}$

$Ae^{-K_I a} = (B+C)\cos(k_{II}a) - (B-C)i\text{sen}(k_{II}a)$

$-k_I Ae^{-K_I a} = -(B+C)k_{II}\text{sen}(k_{II}a) - (B-C)ik_{II}\cos(k_{II}a)$

Se deduce que $B=C$ y que

$$\boxed{A = 2Be^{k_I a}\cos(k_{II}a)} \tag{4}$$

$\boxed{x=a}$

Se procede igual

$$\boxed{D = 2Be^{k_I a}\cos(k_{II}a)} \tag{5}$$

y se obtiene que $A=D$

Ahora se trabaja la derivada: $-k_I Ae^{-K_I a} = -2Bk_{II}\text{sen}(k_{II}a)$

y se llega directo a que:

$$\boxed{k_I = k_{II}\text{cotg}(k_{II}a)} \tag{6}$$

para $x>0$, para $x<0$, la relación es con signos opuestos.

El problema en realidad sigue, porque es útil graficar las autofunciones y ver el “tuneleo”, chequear las paridades de las soluciones y como obtener la regla de cuantificación a partir de estas identidades.