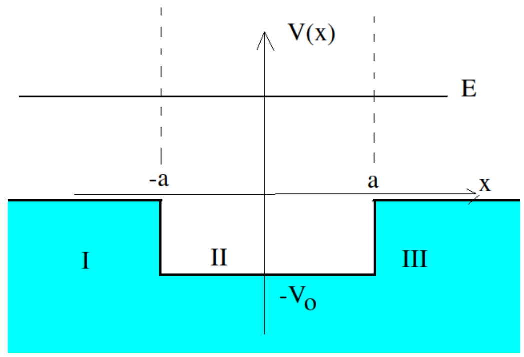
Guía 8: Oscilador armónico, Pozos de Potencial en una dimensión

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríban a carlosv@df.uba.ar o Claudio Archubi archubi@iafe.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 5: Para el potencial del ejercicio 3 pero esta vez con $E > 0$, halle los coeficientes de reflexión y de transmisión.

Solución:



Tenemos que:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\phi = 0 \tag{1}$$

En las regiones I y III, $V = 0$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\phi = 0 \tag{2}$$

$$\boxed{k_I = K_{III} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}} \tag{3}$$

Las soluciones en cada región son:

$$\phi_I(x) = A_I e^{ik_I x} + B_I e^{-ik_I x} \tag{4}$$

$$\phi_{III}(x) = A_{III} e^{ik_I x} + B_{III} e^{-ik_I x} \tag{5}$$

En la región II, $V = -V_0$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 x} + \frac{2m}{\hbar^2}[E + V_0]\phi = 0 \tag{6}$$

$$\boxed{k_{II} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)}} \tag{7}$$

$$\phi_{II}(x) = A_{II} e^{ik_{II} x} + B_{II} e^{-ik_{II} x} \tag{8}$$

Hay que plantear las siguientes condiciones de contorno:

$$\phi_I(-a) = \phi_{II}(-a) \qquad \text{(cI)}$$

$$\phi_{II}(a) = \phi_{III}(a) \qquad \text{(cII)}$$

$$\frac{\partial\phi_I(-a)}{\partial x} = \frac{\partial\phi_{II}(-a)}{\partial x} \qquad \text{(cIII)}$$

$$\frac{\partial\phi_{II}(a)}{\partial x} = \frac{\partial\phi_{III}(a)}{\partial x} \qquad \text{(cIV)}$$

Además $B_{III} = 0$ pues la partícula se supone que va de izquierda a derecha y en la región III no tiene manera de reflejarse en ningún lado.

Para obtener los coeficientes hay que manejar las relaciones que salen a partir de las condiciones de contorno, un camino posible es tomar las siguientes combinaciones:

(cI)k_I+(cIII)

(cI)k_I-(cIII)

(cII)k_I-(cIV)

y trabajando estas expresiones se llega a que:

$$B_{II} = A_{II}\frac{(k_{II} - k_I)}{k_I + k_{II}}e^{2ik_{II}a} \tag{9}$$

$$A_{II} = A_{III}\frac{(k_I + k_{III})}{2k_{II}}e^{2i(k_I + k_{II})a} \tag{10}$$

$$A_I = A_{III}\frac{1}{4k_Ik_{II}}[(k_I + k_{II})^2e^{2i(k_I - k_{II})a} - (k_I - k_{II})^2e^{2i(k_I + k_{II})a} \tag{11}$$

$$B_I = A_{III}\frac{1}{4k_Ik_{II}}[(k_I^2 - k_{II}^2)e^{-2ik_{II}a} - (k_I^2 - k_{II}^2)e^{2ik_{II}a}] \tag{12}$$

El coeficiente de reflexión:

$$R = \frac{B_I^2}{A_I^2} = \frac{(k_I^2k_{II}^2)\text{sen}^2(2k_{II}a)}{4(k_Ik_{II})^2 + (k_I^2 - k_{II}^2)^2\text{sen}^2(2k_{II}a)} \tag{13}$$

y se cumple la relación:

$$R + T = 1 \tag{14}$$

$$T = \frac{(4k_I^2k_{II}^2)}{4(k_Ik_{II})^2 + (k_I^2 - k_{II}^2)^2\text{sen}^2(2k_{II}a)} \tag{15}$$

Expresado en términos de la energía obtenemos:

$$T = \frac{4E(E + V_0)}{4E(E + V_0) + V_0^2\text{sen}^2(2ka)} \tag{16}$$

$$R = \frac{V_0^2\text{sen}^2(ka)}{4E(E + V_0) + V_0^2\text{sen}^2(2ka)} \tag{17}$$

donde $2a$ es el ancho del pozo para un pozo entre 0 y a, los cálculos se tornan levemente mas sencillos porque se eliminan las exponenciales de las condiciones de contorno cI y cIII.

Recordar que esto es válido porque para las regiones I y III tienen el mismo k se utiliza el flujo de corriente de probabilidad J

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right]\hat{x} \tag{18}$$

Hay que hacerlo para cada región, y de ahí se deducen los coeficientes de transmisión y reflexión.