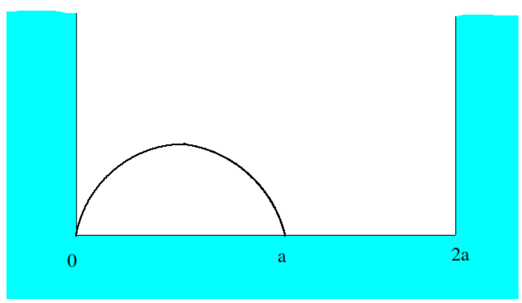
Guía 8: Oscilador armónico, Pozos de Potencial en una dimensión

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríban a carlosv@df.uba.ar o Claudio Archubi archubi@iafe.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 12: Considere un pozo infinito unidimensional de ancho a que en un momento dado se expande súbitamente hasta duplicar su ancho (*i.e.* pasa de $[0, a]$ a $[0, 2a]$). La partícula que hay dentro, antes de la expansión se encuentra en el estado fundamental. Se pide:

1. Un gráfico del perfil de la función de onda en el instante inmediatamente posterior a la expansión, las nuevas autoenergías del hamiltoniano y los correspondientes períodos de oscilación (los periodos de oscilación de las autofunciones asociadas a cada energía).
2. El tiempo que debe dejarse transcurrir para poder restaurar el pozo a su anchura original, de modo tal que la función de onda vuelva a ser la correspondiente al estado fundamental del pozo de lado a.
3. Suponiendo que la función de onda del pozo expandido puede aproximarse por sus dos componentes de más baja energía, calcular en función del tiempo la probabilidad de encontrar a la partícula en la mitad nueva del pozo (o sea, entre a y $2a$).

Solución: Al expandirse el pozo cambia la base de autofunciones y $\Psi_0(x)$ ya no forma parte de esa base.



Tenemos que:

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) & si \quad x \leq a \\ 0 & si \quad x \geq a \end{cases} \tag{1}$$

con $E_0 = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

La nueva base del pozo ampliado es:

$$\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \qquad \text{si} \qquad 0 \leq x \leq 2a \tag{2}$$

con $E_n = \dfrac{n^2\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$

Antes de la expansión la función de onda completa era:

$$\Psi_0(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-i\omega_0 t} \tag{3}$$

con $\omega_0 = \dfrac{E_0}{\hbar} = \dfrac{\hbar\pi^2}{2ma^2}$ después $\omega_n = \dfrac{\hbar n^2\pi^2}{8ma^2}$

Entonces $T_n = 4T_0/n^2$

b) La función de onda original $\Psi_0(x,t)$ se va a deformar a medida que transcurre el tiempo porque ya no forma parte de la nueva base. Expandida en la nueva base estará constituida por una combinación de infinitas autofunciones de dicha base:

$$\Psi_0(x,t) = \sum_n a_n \Psi_n(x,t) = \sum_n a_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{4}$$

transcurrido un cierto tiempo t, todas las componentes volverán a estar en fase otra vez:

$$\Psi(x,t) = \sum_n a_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) = \sum_n a_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) e^{-iE_n t/\hbar} \tag{5}$$

¿Cuánto vale t?

$\forall \to \dfrac{E_n}{\hbar}t = 2s_n\pi$ con $s_n \in N$

Entonces $t = \dfrac{2\pi s_n \hbar}{n^2 E_1}$

Para que la componente con $n = 1$ vuelva a estar en fase con su valor inicial deberá cumplir que $\dfrac{E_1 t_1}{\hbar} = 2\pi s_1$

Entonces para que una componente cualquiera vuelva a su fase original: $t_n = \dfrac{s_n t_1}{s_1 n^2}$ y como puede elegir... elijo $s_n = s_1 n^2$ Por lo tanto $t_n = t_1 \quad \forall n \to t = t_1$

c) Suponemos que $\Psi_0(x,t) = \sum_{n=1}^{2} a_n \mathrm{sen}(n\pi x/(2a)) e^{-iE_n t/\hbar} = \dfrac{a_1}{\sqrt{a}}\mathrm{sen}(\pi x/(2a))e^{-iE_1 t/\hbar} + \dfrac{a_2}{\sqrt{a}}\mathrm{sen}(\pi x/a)e^{-iE_2 t/\hbar}$

La probabilidadde hallar a la partícula entre a y $2a$ será:

$$P(a \le x \le 2a) = \int_a^{2a} |\Psi_0(x,t)|^2 dx = \int_a^{2a} \Psi_0(x,t)\Psi_0^*(x,t)dx = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} - \frac{8}{3}a_1 a_2 \cos[(E_2 - E_1)t/\hbar] \tag{6}$$

Veamos cuanto vale a_1 y a_2:

$$a_n = \int_0^{2a} \Psi_o(x)\Psi_n(x)dx = ... = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(nu/2)\mathrm{sen}u du \tag{7}$$

Las soluciones son:

$\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\dfrac{4}{3} \quad (n = 1)$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad (n = 2)$

Por lo que la probabilidad es:

$$P(x) = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4} - \frac{8}{3}\frac{4}{3\pi}\cos\left(\frac{\hbar 3\pi^2 t}{8na^2}\right) \tag{8}$$