PROBABILIDAD

Gilda Garibotti

El término *probabilidad* se refiere al estudio de azar e incertidumbre. En cualquier situación en la cual uno de un número de resultados puede ocurrir, la teoría de probabilidad provee métodos para cuantificar la posibilidad o la verosimilitud de ocurrencia asociada a cada uno de los resultados.

1. Espacio muestral y eventos

Un *experimento* es cualquier acción o proceso que genera observaciones. Por ejemplo, un experimento puede ser tirar una moneda una o muchas veces, elegir una carta o varias cartas de un mazo, pesar un objeto, obtener el grupo sanguíneo de un grupo de individuos o medir la fuerza de compresión de barras de acero.

Definición 1.1. El *espacio muestral*, $\mathcal{S}$, de un experimento es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

Ejemplo 1.2. Los experimentos mas simple son aquellos en los que hay sólo dos resultados posibles. Por ejemplo, examinar si una lamparita funciona. El espacio muestral es $\mathcal{S} = \{F, N\}$, donde F representa funciona y N indica no funciona. Otro experimento de este tipo es tirar una moneda. El espacio muestral es $\mathcal{S} = \{C, T\}$, donde C indica cara y T ceca.

Ejemplo 1.3. Si tiramos un dado de 6 lados una vez y registramos el número que sale, entonces $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si tiramos un dado rojo y uno verde y registramos los números obtenidos. El resultado de un experimento consiste en un par de números, donde el primer número representa el resultado del dado rojo y el segundo el del dado verde. Por ejemplo, $(3, 6)$ indica que obtuvimos un 3 en el dado rojo y un 6 en el verde. El espacio muestral consiste de 36 pares de números,

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \{&(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\\ &(2,5),\ (2,6),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (4,1),\ (4,2),\\ &(4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\ (5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),\\ &(6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}.\end{aligned}$$

Note que $(3, 6)$ es distinto que $(6, 3)$ y ambos están en el espacio muestral.

Ejemplo 1.4. Si una batería tiene voltaje que está fuera de ciertos límites, esa batería está fallada (F), si el voltaje está dentro de ciertos límites, es normal (N). Suponga que un experimento consiste en testear cada batería a medida que sale de la linea de producción hasta que se observa la primera normal. El espacio muestral es

$$\mathcal{S} = \{N, FN, FFN, FFFN, \ldots\}.$$

Ejemplo 1.5. Una fábrica extrae una lámpara al azar, se la enciende y se la deja prendida hasta que se quema. Nos interesa el tiempo de vida de la lámpara. En este caso $\mathcal{S} = \mathbb{R}_{>0}$.

Como vemos los espacios pueden ser

- finitos (ejemplos 1.2 y 1.3)
- infinitos numerables (ejemplo 1.4)
- infinito no numerable (ejemplo 1.5)

No sólo interesan cada uno de los posibles resultados del experimento sino que pueden interesarnos familias o colecciones de ellos.

Definición 1.6. Un *evento* es cualquier colección (subconjunto) de resultados del espacio muestral $\mathcal{S}$.

Ejemplo 1.7. En el experimento del Ejemplo 1.3 un evento es que los dos dados muestren el mismo número,

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

Como los eventos son conjuntos, valen las mismas relaciones que en teoría de conjuntos.

- La *unión* de dos eventos, $A \cup B$, es el suceso que ocurre si ocurre A o ocurre B.
- La *intersección* de dos eventos, $A \cap B$, es el suceso que ocurre si ocurre A y ocurre B.
- El *complemento* de un evento A, $\bar{A}$, es el suceso que ocurre si no ocurre A.

Los sucesos A y B se dicen *excluyentes* o *disjuntos* si cada vez que ocurre A no puede ocurrir B o sea $A \cap B = \phi$.

2. Axiomas, interpretación y propiedades de probabilidad

Dado un experimento y un espacio muestral $\mathcal{S}$, el objetivo de la probabilidad es asignarle a cada evento A un número $P(A)$, llamado la probabilidad de A. $P(A)$ es una medida de la posibilidad de que A ocurra. Esta asignación deberá cumplir los siguientes axiomas:

- Para cualquier evento A, $P(A) \geq 0$.
- $P(\mathcal{S}) = 1$.
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección finita de eventos excluyentes, entonces
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$
- Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es una colección infinita de eventos excluyentes, entonces
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Ejemplo 2.1. En el experimento en el que se tira una moneda, el espacio muestral es $\mathcal{S} = \{C, T\}$. El primer axioma especifica que $P(\mathcal{S}) = 1$, entonces para completar la asignación de probabilidad, debemos determinar $P(\{C\})$ y $P(\{T\})$. Como $\{C\}$ y $\{T\}$ son eventos disjuntos y $\{C\} \cup \{T\} = \mathcal{S}$, entonces $1 = P(\mathcal{S}) = P(\{C\}) + P(\{T\})$. Una posible asignación de probabilidad es $P(\{C\}) = 0{,}5$ y $P(\{T\}) = 0{,}5$, otra posible asignación es $P(\{C\}) = 0{,}25$ y $P(\{T\}) = 0{,}75$. Si p es un número entre 0 y 1, $P(\{C\}) = p$ y $P(\{T\}) = 1 - p$ es una asignación consistente con los axiomas.

El ejemplo muestra que los axiomas no determinan la probabilidad de todos los eventos. La asignación correcta depende de la manera en la que el experimento se llevó a cabo y con la interpretación de la probabilidad. Una interpretación intuitiva de la probabilidad es como frecuencia.

Supongamos que repito un experimento n veces en forma independiente y bajo las mismas condiciones y sea A un evento que consiste en un subconjunto de posibles resultados del experimento. Sea n_A el número de veces que ocurre A. El cociente n_A/n se llama frecuencia relativa de A. Empíricamente, basándose en los resultados de muchos experimentos, se ve que a medida que n se hace grande, la frecuencia relativa se estabiliza. La interpretación de la probabilidad de A es como el valor límite de la frecuencia relativa de A cuando n tiende a infinito.

Proposición 2.2. *Propiedades de las probabilidades*

- *Para todo evento A, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.*
- *Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cap B) = 0$.*
- *Para cualquier par de eventos A y B,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2.1. Espacios equiprobables

Se llama espacio de equiprobabilidad a aquellos espacios finitos cuyos elementos tienen todos la misma probabilidad. Sea $\mathcal{S} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $p_i = P(\{w_i\})$. Si el espacio es equiprobable entonces $p_i = 1/m$ para todo i.

Ejemplo 2.3. Tiro dos monedas y observo el número de caras. Luego $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$. Una posible asignación de probabilidades es

$$P(\{0\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{1\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{2\}) = \frac{1}{4}.$$

ya que el suceso $\{1\}$ tiene el doble de posibilidades de ocurrir que los otros dos.

Si quisiera un espacio de equiprobabilidad debería haber tomado

$$\mathcal{S} = \{(C,C), (C,T), (T,C), (T,T)\}$$

que es artificial pues las dos monedas son indistinguibles. Sin embargo, esos espacios artificiales ayudan, a veces, a la asignación de probabilidades.

3. Técnicas para contar

Cuando el espacio es equiprobable, el cálculo de la probabilidad consiste en contar. La probabilidad de un evento A está dada por

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\mathcal{S}}.$$

A continuación se dan algunas técnicas generales para contar el número de elementos de un conjunto.

3.1. Método del producto

Esta regla se aplica a situaciones en las cuales un evento consiste de k-uplas. Si un dado de 6 lados se tira 5 veces, entonces cada resultado del experimento es una sucesión de 5 números, por ejemplo $(2, 3, 3, 4, 2)$.

Proposición 3.1. *Suponga que un evento consiste de k-uplas y que hay n_1 posibilidades para el primer elemento, para cada elección del primer elemento hay n_2 posibilidades para el segundo elemento, y así siguiendo, hay n_k posibilidades para el k-ésimo elemento. Entonces hay $n_1 n_2 \cdots n_k$ posibles k-uplas.*

En el Ejemplo 1.3 del dado, hay 6 posibilidades para el dado rojo (primer elemento del par) y por cada una de estas posibilidades hay 6 para el dado verde. Entonces el cardinal del espacio muestral es, $\#\mathcal{S} = 6 \cdot 6 = 36$.

3.2. Permutaciones

En la situación de la Sección 3.1 los elementos de las k-uplas podían ser elegidos de conjuntos totalmente distintos, o como en caso del dado, los elementos son elegidos siempre del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pero con reposición. Ahora consideramos un conjunto fijo de n elementos distintos y supongamos que una k-upla se forma eligiendo sucesivamente de este conjunto sin reposición, de modo que un elemento puede aparecer como máximo en una de las k posiciones.

Proposición 3.2. *Cualquier conjunto ordenado de k objetos tomado de un conjunto de n objetos distintos es llamado permutación de tamaño k de los objetos. El número de permutaciones de tamaño k que puede ser construido a partir de n objetos se denota $P_{k,n}$.*

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3.3. Combinaciones

Hay situaciones en las cuales uno tiene un conjunto de n elementos distintos y quiere contar el número de subconjuntos de tamaño k. Por ejemplo, si se quiere formar un comité, el orden en que los miembros del comité son listados puede no ser importante y sólo importa cuáles personas son elegidas.

Proposición 3.3. *Dado un conjunto de n objetos distintos, cualquier subconjunto de k elementos es llamado combinación. El número de combinaciones de k elementos que se pueden formar a partir de n objetos distintos es*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ejemplo 3.4. De un grupo de 6 mujeres y 4 hombres se deben elegir 3 personas para que los representen en 3 congresos a desarrollarse en mayo, junio y septiembre.

1. Si a cada congreso debe ir una persona diferente. Calcular las siguientes probabilidades.
   a) A los dos primeros congresos vayan mujeres.
   b) Haya exactamente una mujer entre las 3 personas elegidas.
   c) Haya por lo menos una mujer entre las 3 personas elegidas.
   d) Al segundo congreso vaya una mujer.
2. Suponiendo que una persona puede ir a más de un congreso, calcular las mismas probabilidades que en el inciso 1.
3. Con la misma hipótesis que en el inciso 1 y suponiendo que lo único que importa es elegir a las 3 personas que irán a los congresos, sin importar a cuál de ellos, calcular las probabilidades del inciso 1 que tengan sentido para este experimento.

Solución. Numeremos las mujeres entre 1 y 6 y los hombres entre 7 y 10.

1. Una manera de describir el espacio muestral es

$$\mathcal{S}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \,:\, 1 \leq x_i \leq 10,\ x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3\}.$$

Por el método de las permutaciones de la Sección 3.2, el número de elementos de $\mathcal{S}_1$ es $\#\mathcal{S}_1 = P_{3,10} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Es razonable asignar equiprobabilidad a este espacio.

a) Sea A el evento a los dos primeros congresos van mujeres,

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}_1 \,:\, 1 \leq x_1 \leq 6,\ 1 \leq x_2 \leq 6\}.$$

El cardinal de A es $\#A = 6 \cdot 5 \cdot 8 = 240$, por lo tanto $P(A) = 240/720 = 1/3$.

b) Sea B_i, $i = 1, 2, 3$ el evento al congreso i va una mujer y a los otros dos congresos van hombres,

$$B_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}_1 \,:\, 1 \leq x_i \leq 6 \text{ y } 7 \leq x_j \leq 10 \text{ si } j \neq i\}.$$

$\#B_i = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$, entonces $P(B_i) = 72/720 = 1/10$. El evento de interés es $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Note que B_i son eventos disjuntos, por lo tanto $P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 3 \cdot 1/10 = 3/10$.

c) Sea C el evento hay por lo menos una mujer entre las 3 personas elegidas, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ donde C_i es el evento hay exactamente i mujeres entre las personas elegidas. Note que C_i son eventos disjuntos. Como ya vimos en el inciso 1*b*, $P(C_1) = 3/10$. El cálculo de la probabilidad de C_2 es análogo al de C_1, $P(C_2) = 3(4 \cdot 6 \cdot 5)/720 = 1/2$. $P(C_3) = (6 \cdot 5 \cdot 4)/720 = 1/6$. Por lo tanto, $P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) = 29/30$.

Otra manera, más simple de resolver este problema es teniendo en cuenta que el complemento del evento C es no hay ninguna mujer entre las elegidas,

$$\bar{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}_1 \,:\, 7 \le x_i \le 10\}.$$

$\#\bar{C} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, por lo tanto $P(\bar{C}) = 24/720 = 1/30$. Entonces, $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 29/30$.

d) Sea D el evento al segundo congreso va una mujer,

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}_1 \,:\, 1 \le x_2 \le 6\}.$$

$\#D = 6 \cdot 9 \cdot 8 = 432$, entonces $P(D) = 432/720 = 3/5$.

2. En este caso el espacio muestral es

$$\mathcal{S}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \,:\, 1 \le x_i \le 10\}.$$

Por el método del producto de la Sección 3.1, el número de elementos de $\mathcal{S}$ es $\#\mathcal{S} = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.

a) Sea A el evento a los dos primeros congresos van mujeres,

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}_2 \,:\, 1 \le x_1 \le 6,\ 1 \le x_2 \le 6\}.$$

$\#A = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 360$, por lo tanto $P(A) = 360/1000 = 9/25$.

b) Definamos B_i, $i = 1, 2, 3$ de manera análoga a lo hecho en 1*b*, $\#B_i = 6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$. Entonces $P(B_i) = 96/1000 = 12/125$. Por lo tanto $P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 3 \cdot 12/125 = 36/125$.

c) Si definimos el evento C de manera análoga a lo hecho en 1*c*, tenemos que $\#\bar{C} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Por lo tanto $P(\bar{C}) = 64/1000 = 8/125$ y $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 117/125$.

d) Sea D el evento al segundo congreso va una mujer,

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}_2 \,:\, 1 \le x_2 \le 6\}.$$

$\#D = 6 \cdot 10 \cdot 10 = 600$, entonces $P(D) = 600/1000 = 3/5$.

3. En este caso el espacio muestral es

$$\mathcal{S}_3 = \{\{x_1, x_2, x_3\} \,:\, 1 \le x_i \le 10,\ x_i \ne x_j \text{ si } i \ne j,\ i, j = 1, 2, 3\}.$$

Ahora, el espacio muestral ya no consiste de k-uplas sino de subconjuntos de elementos. Por lo tanto, el cardinal de $\mathcal{S}_3$ está dado por el número de combinaciones de 3 elementos que se pueden formar a partir de 10 objetos distintos. Por el resultado de la Sección 3.3 este número es

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120.$$

a) Como ahora no importa quien va a que congreso, esta probabilidad no tiene sentido.

b) El evento, B, hay una mujer entre las tres personas elegidas si tiene sentido.

$$B = \{\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{S}_3 \,:\, 1 \le x_1 \le 6 \text{ y } 7 \le x_j \le 10, j = 2, 3\}.$$

El número de posibilidades de elegir una mujer entre 6 es $\binom{6}{1} = 6$ y el número de posibilidades de elegir 2 hombres entre 4 es $\binom{4}{2} = 6$. Por lo tanto, $\#B = 6 \cdot 6 = 36$ y $P(B) = 36/120 = 3/10$.

c) Sea C el evento hay por lo menos una mujer entre las 3 personas elegidas. Entonces,

$$\bar{C} = \{\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{S}_3 \,:\, 7 \le x_i \le 10\}.$$

$\#\bar{C} = \binom{4}{3} = 4$, por lo tanto $P(\bar{C}) = 4/120 = 1/30$ y $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 29/30$.

d) Este evento no tiene sentido.

$\square$

4. Probabilidad condicional

La probabilidad asignada a un evento depende de lo que sabemos sobre la asignación experimental. La probabilidad condicional nos da información sobre la probabilidad de ocurrencia de un evento cuando sabemos que otro evento ha ocurrido.

Definición 4.1. Para cualquier par de eventos A y B con $P(B) > 0$, la *probabilidad condicional* de A dado que ocurrió B está definida por

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Proposición 4.2. *La definición de probabilidad condicional lleva al siguiente resultado*

$$P(A \cap B) = P(A \,|\, B)P(B).$$

Proposición 4.3. *Ley de probabilidad total*

Sean $A_1, \ldots, A_n$ *eventos mutuamente excluyentes y tales que* $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \mathcal{S}$. *Entonces la probabilidad de un evento* B *es*

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \,|\, A_1)P(A_1) + \cdots + P(B \,|\, A_n)P(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \,|\, A_i)P(A_i). \end{aligned}$$

Proposición 4.4. *Teorema de Bayes*

Sean $A_1, \ldots, A_n$ *eventos mutuamente excluyentes y tales que* $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \mathcal{S}$ *y* $P(A_i) > 0$ *para* $i = 1, \ldots, n$. *Entonces para cualquier evento* B *tal que* $P(B) > 0$,

$$P(A_k \,|\, B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \,|\, A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \,|\, A_i)P(A_i)}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Ejemplo 4.5. En una fábrica dos máquinas trabajan simultáneamente produciendo un mismo artículo. Se sabe que la máquina A produce el doble que la B. El porcentaje de artículos defectuosos producido por A es 10 %, en tanto que el porcentaje de artículos defectuosos producido por B es 5 %.

Si se elige un artículo al azar, cuál es la probabilidad de que resulte bueno?

Solución. Sea A el evento el artículo es producido por la máquina A y B el evento el artículo es producido por la máquina B. Como $P(A) + P(B) = 1$ y $P(A) = 2P(B)$ resulta que $P(A) = 2/3$ y $P(B) = 1/3$.

Sea D el evento el artículo es defectuoso. $P(D \,|\, A) = 0{,}1$ y $P(D \,|\, B) = 0{,}05$.

Queremos calcular $P(\bar{D})$ y sabemos que $P(\bar{D}) = 1 - P(D)$. Por la *Ley de probabilidad total* resulta

$$P(D) = P(D \,|\, A)P(A) + P(D \,|\, B)P(B) = 0{,}1\,\frac{2}{3} + 0{,}05\,\frac{1}{3} = 0{,}083.$$

Por lo tanto, $P(\bar{D}) = 1 - 0{,}083 = 0{,}917$. $\square$

5. Independencia

La probabilidad condicional de un evento A dado otro evento B nos permite incorporar a la probabilidad de A la información de que el evento B ocurrió. Hay situaciones en las cuales saber que el evento B ocurrió no nos agrega información sobre el evento A, es decir, $P(A \,|\, B) = P(A)$.

Definición 5.1. Dos eventos A y B son *independientes* si $P(A \,|\, B) = P(A)$ y *dependientes* en otro caso.

Proposición 5.2. *A y B son independientes si y sólo si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ejemplo 5.3. Considere un sistema de componente como el de la Figura 5.3. Los componentes 1 y 2 están conectados en paralelo de manera tal que el subsistema funcionará si y sólo si cualquiera de ellos funciona; en cambio los componente 3 y 4 están conectados en serie y por lo tanto este subsistema funcionará si y sólo si ambos funcionan. Si los componentes trabajan independientemente y la probabilidad de que un componente cualquiera no funcione es 0,05, calcule la probabilidad de que el sistema funcioneă(confiabilidad del sistema).

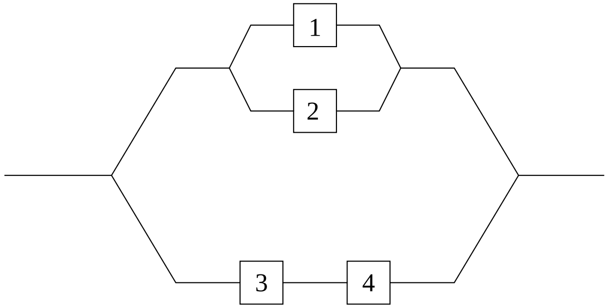

Figura 5.3. Sistema de componentes

Solución. Sea A_i, $i = 1, \ldots, 4$ el evento que el componente i funcione. Entonces, la probabilidad de que el sistema funcione es

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup (A_3 \cap A_4)) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2) \\
&\quad - P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2) - P(A_1)P(A_3)P(A_4) \\
&\quad - P(A_2)P(A_3)P(A_4) + P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\
&= 0{,}95 + 0{,}95 + 0{,}95^2 - 0{,}95^2 - 0{,}95^3 - 0{,}95^3 + 0{,}95^4 = 0{,}9998.
\end{aligned}$$

La primera igualdad es consecuencia de la Proposición 2.2 y la segunda de la independencia de los componentes. □

Ejemplo 5.4. Una empresa de computación se ha presentado a la licitación de tres proyectos. Sea A_i el evento la empresa gana el proyecto i, $i = 1, 2, 3$. Supongamos que $P(A_1) = 0{,}22$, $P(A_2) = 0{,}25$ y $P(A_3) = 0{,}58$. Suponiendo que la decisión respecto de las tres licitaciones se realiza de manera independiente.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que no gane ninguna licitación?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que no gane al menos una licitación?

Solución.

1. La probabilidad de que no gane ninguna licitación es

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0{,}78 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}42 = 0{,}2457.$$

2. El evento no gane al menos una licitación es el complemento del evento gane todas las licitaciones. Por lo tanto la probabilidad de que no gane al menos una licitación es

$$1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - 0{,}22 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}58 = 0{,}9681.$$

□

Referencias

[1] Devore J. L., 1982. Probability and statistics for engineering and the sciences, 3rd Edition, Brooks/Cole.