

1 Ejercicio 1 (falta ítem d)

La cantidad de partículas con velocidad (en módulo) entre v_1 y v_2 está dada por

$$N(v_1 \leq v \leq v_2) = \int_{v_1}^{v_2} dN_v = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv. \quad (1)$$

Notar que

$$N(v \leq v' \leq v + dv) = \int_v^{v+dv} f(v') dv' = f(v) dv = dN_v \quad (2)$$

y por lo tanto dN_v es la cantidad de partículas que tienen velocidad entre v y $v + dv$. Además, notar también que la probabilidad de que una partícula tenga velocidad entre v_1 y v_2 está dada por $p(v) = \frac{f(v)}{N}$.

Habiendo dicho esto, el ítem a es muy sencillo ya que solo es graficar la función $f(v)$.

En cuanto al b, como $N(0 \leq v \leq +\infty) = N$ entonces

$$\int_0^\infty f(v) dv = \int_0^V k dv = kV = N \quad (3)$$

y por lo tanto $k = \frac{N}{V}$.

Para el c, la velocidad media es

$$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} vp(v) dv = \int_0^V \frac{v}{V} dv = \frac{V}{2}, \quad (4)$$

mientras que la velocidad cuadrática media (no confundir con la del centro de masa) es

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \left[\int_0^{+\infty} v^2 p(v) dv \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^V \frac{v^2}{V} dv \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{V}{\sqrt{3}}. \quad (5)$$

2 Ejercicio 2

La distribución de Maxwell-Boltzmann de una molécula correspondiente a un gas ideal está dada por

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = Ae^{-\beta E(\vec{r}, \vec{v})} = Ae^{-\beta \frac{m}{2} v^2}, \quad v = |\vec{v}|, \quad (6)$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad del centro de masa de la molécula. Para hallar la constante A , basta con pedir

$$\int d^3r \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}) = N. \quad (7)$$

Se tiene que

$$\int d^3r \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}) = AV \int d^3v e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} = AV \left(\int_0^\infty dv_x e^{-\beta \frac{m}{2} v_x^2} \right)^3 = AV \left(\frac{2\pi}{m\beta} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (8)$$

y por lo tanto

$$A = \frac{N}{V} \left(\frac{m\beta}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (9)$$

Habiendo hecho esto, la velocidad cuadrática media es

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} \int d^3r \int d^3v v^2 f(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{AV}{N} \int d^3v v^2 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} = \frac{AV}{N} \int d\Omega \int_0^\infty dv v^4 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} = 4\pi \left(\frac{m\beta}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dv v^4 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2}. \quad (10)$$

Llamando $\alpha = \beta \frac{m}{2}$ se tiene que

$$\int_0^\infty dv v^4 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} = \int_0^\infty dv v^4 e^{-\alpha v^2} = \int_0^\infty dv \frac{d^2}{d\alpha^2} e^{-\alpha v^2} = \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^\infty dv e^{-\alpha v^2} = \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha^{\frac{5}{2}}}. \quad (11)$$

Luego,

$$\frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (12)$$

como es de esperar. Esto es la energía cinética media de traslación. Si el gas es monoatómico, esto es directamente la energía de la molécula, por lo que se obtiene $U = \frac{3}{2}NkT$. Si la molécula tiene mas átomos, para hallar la energía interna hay que considerar la interacción entre ellos lo cual dificulta la cuenta a no ser que uno simplifique el modelo como se hace para un gas diatómico.

Respecto a la presión, sabiendo que $PV = NkT$ se tiene que $PV = \frac{N}{3}m\langle v^2 \rangle$.

En cuanto al ítem b, si en el gas hay varias clases de moléculas, para cada una de ellas se tiene que $\frac{m_i}{2}\langle v_i^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$ y por ende directamente $PV = \frac{1}{3}\sum_i m_i\langle v_i^2 \rangle$. Como el volumen que ocupan es el mismo se llega a la ley de Dalton $P = \sum_i P_i = (\sum_i N_i) \frac{kT}{V}$.

En cuanto al c, escribiendo la velocidad en coordenadas esféricas v , θ , φ se tiene que

$$P(v_1 \leq v \leq v_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2) = \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{v_1}^{v_2} dv v^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sin \theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi e^{-\beta \frac{m}{2} v^2}. \quad (13)$$

Luego,

$$P(v_1 \leq v \leq v_2) = \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{v_1}^{v_2} dv v^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} = 4\pi \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{v_1}^{v_2} dv v^2 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2}. \quad (14)$$

Esto implica que la distribución de probabilidad para las velocidades escalares está dada por

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2}. \quad (15)$$

La velocidad mas probable se obtiene maximizando esta función llegando a $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ mientras que el valor medio de la velocidad es

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_p. \quad (16)$$

Luego, la probabilidad de que una partícula tenga una velocidad entre la más probable y la media está dada por

$$P(v_p \leq v \leq \langle v \rangle) = 4\pi \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{v_p}^{\frac{2}{\sqrt{\pi}} v_p} dv v^2 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} = 4\pi \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_1^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} du v_p^3 u^2 e^{-\beta \frac{m}{2} v_p^2 u^2} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} du u^2 e^{-u^2} \simeq 0,21. \quad (17)$$