1. Problema 2

En cuanto al ítem a,

$$\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right]=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\sigma}+\imath\frac{\sigma\hat{p}}{\hbar}\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\sigma}-\imath\frac{\sigma\hat{p}}{\hbar}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{\hat{x}}{\sigma},-\imath\frac{\sigma\hat{p}}{\hbar}\right]+\left[\imath\frac{\sigma\hat{p}}{\hbar},\frac{\hat{x}}{\sigma}\right]\right)=\left[\imath\frac{\sigma\hat{p}}{\hbar},\frac{\hat{x}}{\sigma}\right]=\frac{\imath}{\hbar}\left[\hat{p},\hat{x}\right]=-\frac{\imath}{\hbar}\left[\hat{x},\hat{p}\right]=1. \tag{1}$$

En cuanto al b,

$$\hat{a}^{\dagger}\hat{a}=\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}}{\sigma}-\imath\frac{\sigma\hat{p}}{\hbar}\right)\left(\frac{\hat{x}}{\sigma}+\imath\frac{\sigma\hat{p}}{\hbar}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}^2}{\sigma^2}+\imath\frac{\hat{x}\hat{p}}{\hbar}-\imath\frac{\hat{p}\hat{x}}{\hbar}+\frac{\sigma^2\hat{p}^2}{\hbar^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}^2}{\sigma^2}+\frac{\imath}{\hbar}\left[\hat{x},\hat{p}\right]+\frac{\sigma^2\hat{p}^2}{\hbar^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}^2}{\sigma^2}+\frac{\sigma^2\hat{p}^2}{\hbar^2}-1\right) \tag{2}$$

y por lo tanto

$$\hbar\omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega\left(\frac{\hat{x}^2}{\sigma^2}+\frac{\sigma^2\hat{p}^2}{\hbar^2}\right)=\hat{H}. \tag{3}$$

2. Problema 4

La constante A se obtiene de

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+A^2=1, \tag{4}$$

es decir,

$$A=\sqrt{\frac{3}{8}}. \tag{5}$$

La función de onda para todo tiempo está dada por

$$\psi\left(\overline{r},t\right)=\frac{1}{\sqrt{4}}\varphi_{100}\left(\overline{r}\right)e^{-\frac{\imath}{\hbar}E_0t}-\frac{1}{\sqrt{8}}\varphi_{211}\left(\overline{r}\right)e^{-\frac{\imath}{\hbar}E_2t}+\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\varphi_{32-2}\left(\overline{r}\right)+\sqrt{\frac{3}{8}}\varphi_{321}\left(\overline{r}\right)\right)e^{-\frac{\imath}{\hbar}E_3t}. \tag{6}$$

Los posibles valores de energía son E_0 con probabilidad $\frac{1}{4}$, E_2 con probabilidad $\frac{1}{8}$ y E_3 con probabilidad $\frac{5}{8}$. Los posibles valores medios de L^2 son 0 con probabilidad $\frac{1}{4}$, $2\hbar^2$ con probabilidad $\frac{1}{8}$ y $6\hbar^2$ con probabilidad $\frac{5}{8}$. Los posibles valores medios de L_z son 0 con probabilidad $\frac{1}{4}$, $\hbar$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ y $-2\hbar$ con probabilidad $\frac{1}{4}$.

Finalmente, $\left\langle\hat{H}\right\rangle=\frac{1}{4}E_0+\frac{1}{8}E_2+\frac{5}{8}E_3$, $\left\langle\hat{L}^2\right\rangle=\frac{1}{8}2\hbar^2+\frac{5}{8}6\hbar^2=4\hbar^2$, $\left\langle\hat{L}_z\right\rangle=\frac{1}{2}\hbar-\frac{1}{4}2\hbar=0$.