Integrador: Guías 5-6

- Considere un cuerpo a temperatura $T = 1500K$ en donde la diferencia entre los distintos niveles de energía (a altas frecuencias) es $1eV$. El número de estados disponibles para cada energía es $N(E) = Ce^{-\frac{E}{kT}}$. Utilizando la hipótesis de Planck, encuentre el valor medio $< E >$ para el sistema. Calcule la frecuencia y la longitud de onda de la radiación emitida. ¿En qué parte del espectro se encuentra?

- Se diseña un circuito que debe operar a temperatura ambiente. El circuito consta de una resistencia de 100Ω y se espera que circule una corriente de $1mA$. Estime el tamaño máximo de la resistencia si la temperatura no debe sobrepasar los $400K$ *Ayuda: la potencia disipada por un circuito es $P = I^2R$. Tenga en cuenta la ley de Steffan-Boltzmann.*

- Incide radiación ultravioleta de longitud de onda $\lambda = 200nm$ sobre un cátodo de aluminio. ¿Cuál es el voltaje necesario para frenar los electrones? *Dato: $\phi_{Al} = 4.3\ eV$*

- a) Sabiendo que el potencial electrostático para un átomod hidrogenoide es $V(r) = -\frac{ke^2}{r}$ y usando la ecuación de Newton, muestre que la energía cinética de un electrón en una órbita circular es:

$$E_k = \frac{ke^2}{2r} = -\frac{V}{2} \tag{1}$$

Muestre entonces que la energía total es:

$$E = -\frac{ke^2}{2r} \tag{2}$$

b) Usando la cuantización de Bohr del momento angular, mostrar que los radios de las órbitas permitidas de un electrón en un átomo hidrogenoide ($Z = 1$), en función del nivel de energía n, son:

$$R_n = \frac{n^2\hbar^2}{mke^2} \tag{3}$$

Calcule el radio $R_1 = a_0$ llamado *radio de Bohr.*. Encuentre una expresión para las velocidades permitidas del electrón.

c) Usando que la *constante de estructura fina* es $\alpha = \frac{2\pi ke^2}{hc}$, muestre que la energía se puede escribir como:

$$E_n = -\frac{\alpha mc^2}{2n^2} = \frac{-13.6eV}{n^2} \tag{4}$$

¿Qué significa que la energía sea negativa? Encuentre una expresión para la diferencia de energía entre niveles y utilicela para encuentrar la energía de un fotón que decae desde un estado áltamente excitado ($n \longrightarrow \infty$) al estado fundamental $n = 1$. Esta energía se llama energía de ionización.

1 Soluciones a los ejercicios

Problema 1

A 1500 K, el valor de kT es:

$$kT = 8.61.10^{-5}\frac{eV}{K} * 1500K = 0.13eV \tag{5}$$

La hipótesis de Planck es que $E_n = nh\nu$. La consigna dice que el numero de estados disponibles como función de la energía es $N(E) = Ce^{-E/kt}$. Podemos calcular los disponibles para cada nivel, las energías y encontrar un patrón. Notemos que la consigna dice que $E_{n+1} - E_n = h\nu = 1eV$. Esto nos da una relación recursiva para cada nivel de energía. Sabiendo que $E_0 = 0$, calculamos los primeros términos:

$$E_0 = 0 \longrightarrow E_1 = 1eV \tag{6}$$
$$E_1 = 1eV \longrightarrow E_2 = 2eV \tag{7}$$
$$... \tag{8}$$
$$E_{n-1} = (n-1).1eV \longrightarrow \boxed{E_n = (n-1).1eV + 1eV = n.1eV} \tag{9}$$

Veamos ahoral os estados disponibles para cada nivel de energía. Hacemos una relación recursiva como antes:

$$N(E_0) = Ce^0 = C \tag{10}$$
$$N(E_1) = Ce^{-\frac{E_1}{kT}} = Ce^{-\frac{1eV}{0.13eV}} = C(4.56.10^{-4}) \tag{11}$$
$$N(E_2) = Ce^{-\frac{E_2}{kT}} = Ce^{-(\frac{1eV}{0.13eV})^2} = C(4.56.10^{-4})^2 \tag{12}$$
$$... \tag{13}$$
$$N(E_n) = Ce^{-\frac{E_n}{kT}} = Ce^{-(\frac{n.1eV}{0.13eV})} = Ce^{-(\frac{1eV}{0.13eV})^n} = \boxed{(4.56.10^{-4})^n} \tag{14}$$

Entonces, el valor medio de la energía se calcula como:

$$< E >= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} N(E_n)E_n}{\sum_{n=1}^{\infty} N(E_n)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C(4.56.10^{-4})^n n.1eV}{\sum_{n=1}^{\infty} C(4.56.10^{-4})^n} \tag{15}$$

Si llamamos $a = 4,56.10^{-4} < 1$ tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \cong 1,0004 \tag{16}$$

La otra serie la podemos calcular a partir de la derivada de la primera serie:

$$\frac{d}{da}\sum_{n=1}^{\infty} Ca^n = C\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} = \frac{C}{a}\sum_{n=1}^{\infty} na^n = \frac{d}{da}\left(\frac{C}{1-a}\right) = \frac{C}{(1-a)^2} \tag{17}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} na^n = \frac{a}{C}\frac{C}{(1-a)^2} = \frac{a}{(1-a)^2}} \tag{18}$$

Reemplazando el valor de a, esta suma es 0.0004. Volviendo al valor medio:

$$< E >= \frac{C.1eV \sum_{n=1}^{\infty} na^n}{C\sum_{n=1}^{\infty} a^n} = \frac{0.0004.1ev}{1.0004} \cong 4.10^{-4}eV \tag{19}$$

Como vimos antes, teníamos que $E_{n+1} - E_n = \Delta E = h\nu$. Sabíamos que $\Delta E = 1eV$ por lo que $\nu = 1eV/h = 1,51 \times 10^{12} Hz$, que es en el espectro infrarrojo.

Problema 2

Primero, como muchos se dieron cuenta, la cota deberia haber sido minima. Asi que ahi hubo un error de la consigna.

Segundo, la resolución. La potencia disipada por efecto Joule en la resistencia es

$$P = I^2R = 10^{-6}A^2 \times 10^2\Omega = 10^{-4}W \tag{20}$$

La resistencia tiene que funcionar a temperatura ambiente y por lo tanto va a absorber calor de su ambiente a la vez que emite. La potencia emitida por unidad de área para un cuerpo a temperatura T está dada por la ley de Steffan-Boltzmann $\frac{P}{A} = R = \sigma T^4$. Entonces, la máxima potencia neta emitida por la resistencia va a ser la diferencia entre lo que emite a la temperatura maxima y lo que absorbe del ambiente. Como temperatura ambiente se podía tomar cualquier valor razonable entre $20°C$ y $27°C$. Usando que $\sigma = 5.567Wm^{-2}K^{-4}$:

$$R_{net} = \sigma((400K)^4 - (293K)^4) = 1.014 \times 10^6 \frac{W}{m^2} \tag{21}$$

Luego, sabíamos que $P = 10^{-4}W$. Por lo tanto:

$$A = \frac{P}{R} = \frac{10^{-4}W}{1.014 \times 10^6 \frac{W}{m^2}} = 9.86 \times 10^{-11}m^2 \tag{22}$$

Problema 3

La función trabajo del aluminio era un dato, $\phi_{Al} = 4.3eV$. La energía que lleva un fotón es $E = \frac{hc}{\lambda}$. La máxima energía cinética que puede llevar un electrón arrancado por efecto fotoeléctrico es

$$T_{max} = E - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi \tag{23}$$

Por último, el potencial máximo de frenado es $V_{max} = \frac{T_{max}}{e} = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - \phi\right)$. Poniendo todos los valores, se tiene $V_{max} = 3.45V$

Problema 4

a) El electrón ligado en la orbita circular tiene un radio constante, por lo que el vector posición en coordenadas polares es $\vec{r} = R\hat{r}$. Luego, la aceleración se escribe como $\vec{a} = (r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r}$. Como $r = R = cte$, entonces $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ y por lo tanto $\vec{a} = R\ddot{\theta}\hat{\theta} + R\dot{\theta}^2\hat{r}$. La fuerza electrostática es central y se calcula como el gradiente del potencial. Como sólo depende de r entonces la fuerza es central y vale $F(r) = -\frac{ke^2}{r^2}$. Luego, las ecuaciones de Newton son:

$$R\ddot{\theta} = 0 \tag{24}$$

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{ke^2}{R^2} \tag{25}$$

Por otro lado, el vector velocidad es $\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$, entonces

$$|\vec{v}|^2 = R^2\dot{\theta}^2 = \frac{ke^2}{mR} \Longrightarrow T = \frac{ke^2}{2R} = -\frac{V}{2} \tag{26}$$

Luego, la energía total es:

$$E = T + V = \frac{ke^2}{2R} - \frac{ke^2}{R} = -\frac{ke}{2R} \tag{27}$$

La energía es negativa, lo que indica que el electrón esta en un estado ligado.

b) La cuantización del momento angular en el modelo de Bohr es $|\vec{L}| = n\hbar$. Al mismo tiempo, sabemos que el momento angular es $|\vec{L}| = m|\vec{r} \times \vec{v}| = mR^2\dot{\theta}$, o lo que es lo mismo

$$|\vec{L}|^2 = m^2R^4\dot{\theta}^2 = m^2R^2\frac{ke^2}{mR} = mRke^2 = n^2\hbar^2 \tag{28}$$

. Por lo tanto, se tiene

$$R = \frac{n^2\hbar^2}{ke^2m} \tag{29}$$

El radio de Bohr es $R_1 = a_0 = 0.052nm$. Esto es compatible con el tamaño tipico de un átomo. Para las velocidades permitidas, notamos que $|L| = mRv = n\hbar$, por lo que $v = \frac{n\hbar}{mR}$. Luego:

$$v = \frac{n\hbar}{m}\frac{ke^2m}{n^2\hbar^2} = \frac{ke^2}{n\hbar} \tag{30}$$

c) Como ya tenemos la energía total en términos del potencial, que es dato, y los valores permitidos de R, solo queda reemplazar. Como los radios dependen de una etiqueta $n \in \mathrm{N}$, están cuantizados, entonces también lo estarán las energías:

$$E_n = -\frac{ke}{2R} = -\frac{ke^2}{2} \times \frac{ke^2m}{n^2\hbar^2} = -\frac{k^2e^4m}{2n^2\hbar^2} = -\frac{mc^2\alpha^2}{2n^2} \tag{31}$$

La diferencia entre dos estados de energía consecutivos es:

$$\Delta E = -\frac{mc^2\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \tag{32}$$

Si el electrón sube un nivel, $n_f > n_i \Longrightarrow \frac{1}{n_f} < \frac{1}{n_i}$, por lo que $\Delta E > 0$. Esto significa que el electrón absorbe energía para subir un nivel. Por el contrario, si decae un nivel $n_f < n_i$, por lo que $\Delta E < 0$. Esa energía se pierde en forma de radiación electromagnética. Al pasar de $n_i \longrightarrow \infty$ a $n_f = 1$, se tiene:

$$\Delta E_{\infty \longrightarrow 1} = E_{ion} = -\frac{mc^2\alpha^2}{2} = -13.6eV \tag{33}$$