Serie 12: Ecuación de Schrödinger

1. Escribir la ecuación de Schrödinger para:
   (a) la partícula libre,
   (b) una partícula bajo la influencia de una fuerza uniforme y constante,
   (c) el átomo de hidrógeno,
   (d) el átomo de helio,
   (e) oscilador armónico

2. Mostrar que la ecuación de Schrödinger es separable cuando el potencial de interacción $V(t)$ depende solamente del tiempo y es uniforme en el espacio. Resolver las ecuaciones resultantes cuando $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ ¿Es estacionaria la función de estado resultante?

3. La función de estado del átomo de hidrógeno en su estado fundamental tiene la forma $\Psi(r) = A\exp(-a\ r)$,donde a es una constante que vale 1/53pm. Normalizar esta función esféricamente simétrica a la unidad.
   (a) calcular la probabilidad de encontrar al electrón en el núcleo
   (b) en un punto del espacio distante del núcleo en 53 pm.
   (c) calcular la probabilidad de encontrar al electrón dentro de un elemento de volumen de 1 pm^3 ubicado en los puntos de a) y b)
   (d) calcular la probabilidad que el electrón se encuentre en cualquier lugar dentro de una esfera de radio de 53 pm.
   (e) si el radio de un átomo se define como el radio de una esfera en la cual la probabilidad de encontrar al electrón es del 90%, ¿cuál es el radio del átomo?

4. Una partícula en un potencial unidimensional infinito está descripta por una función de estado $\Psi(x) = A\exp(-x^2/2\Gamma^2)$
   (a) Normalizarla.
   (b) Calcular la probabilidad de encontrar a la partícula en la región $-\Gamma \leq x \leq \Gamma$.

   Nota: la función definida por la integral se denomina función error y se encuentra tabulada en varios textos y en calculadoras y/o programas algebraicos de uso corriente.

5. Considere el siguiente potencial (escalón):

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a/2 \\ V_o & |x| > a/2 \end{cases}$$

   donde a es una constante y representa el ancho del pozo.
   (a) Calcule el coeficiente de reflexión de energía para $E \leq V_o$.
   (b) Calcule el coeficiente de reflexión de energía para $E > V_o$.
   (c) Grafique para electrones de $V_o \sim 10ev$.

6. (a) Mostrar que el valor medio o esperado de la posición $< x >$ de una partícula en una caja unidimensional es $< x >= 0.5L$ donde L es la longitud de la caja. Evaluar la desviación cuadrática media de la posición δx en este caso. ¿Cuál es su significado físico?
   (b) Realizar los mismos cálculos para el momento lineal p
   (c) Evaluar el producto de las desviaciones cuadráticas medias y construir el principio de incerteza. ¿Depende del número cuántico?

7. Considere el siguiente potencial (pozo infinito):

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a/2 \\ \infty & |x| > a/2 \end{cases}$$

donde a es una constante y representa el ancho del pozo.

   (a) Halle las autofunciones de $\hat{H}$ y los niveles de energía de una partícula de masa m.
   (b) Grafique φ_1, φ_2, φ_3 y φ_4 y sus módulos al cuadrado, donde las φ_i son las funciones de onda de los primeros cuatro estados de la partícula.
   (c) Calcule la probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo $(0, a/4)$ para estos cuatro autoestados.
   (d) Calcule $< x >$, $< p >$, $< x^2 >$, $< p^2 >$, Δx, Δp y $\Delta x \Delta p$ para los mismos cuatro estados.
   (e) Calcule y grafique la probabilidad de que la partícula tenga momento lineal p para el primer autoestado y para uno de n grande.
   (f) Escriba una expresión general para $\psi(x, t)$.

8. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

Encuentre las autofunciones de $\hat{H}$ y una ecuación para sus autovalores, para $E < 0$.

9. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & 0 < |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

con $a > 0$. Encuentre las autofunciones de H y una ecuación para sus autovalores para $E < 0$. Compare con el problema anterior.

10. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > b \\ V_0 & a < |x| < b \\ 0 & |x| < a \end{cases}$$

a, b y $V_0 > 0$. Hallar las ecuaciones de autovalores y escriba las funciones de onda correspondientes para los casos:

   (a) $0 < E < V_0$
   (b) $E > V_0$

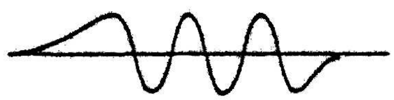
11. Para el potencial del ejercicio previo pero esta vez con $E > 0$, halle los coeficientes de reflexión y de transmisión.

12. Sea el potencial:
$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$
$a > 0$. Halle los coeficientes de reflexión y transmisión para los siguientes rangos de energía de la partícula:

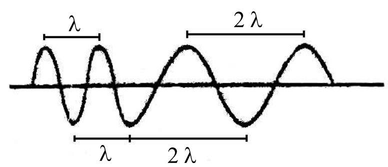
    (a) $0 < E < V_0$

    (b) $E > V_0$.

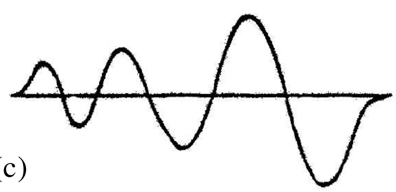
13. Dados los siguientes gráficos de autofunciones de $\hat{H}$, haga un diagrama cualitativo de los potenciales unidimensionales que las producen, marcando en cada caso una línea horizontal para la energía del sistema e indicando de qué nivel se trata (tome al estado fundamental como $n = 1$).



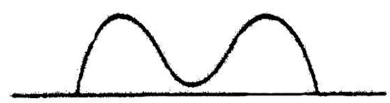
(a)



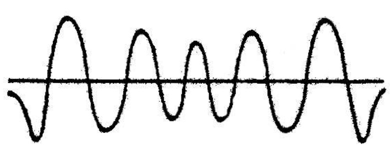
(b)



(c)



(d)



(e)

14. Sea un oscilador armónico con Hamiltoniano $H = p^2/2m + (m\omega^2/2)x^2$. Hallar β para que $\phi_0 = A_0 \exp\left(-\beta x^2\right)$ sea autofunción de $\hat{H}$. ¿Cuál es la energía de este estado? ¿Qué argumentos usaría para demostrar que es el estado fundamental?

15. Proponiendo que $\phi(x) = h(x)\exp(-\beta x^2)$ es autofunción del hamiltoniano del oscilador armónico $\hat{H}$, hallar la ecuación diferencial que debe satisfacer $h(x)$. Muestre que $h(y) = y$ y $h(y) = \left(1 - 2y^2\right)$ con $y \equiv \sqrt{2\beta}x$ son soluciones con autovalores $3\hbar\omega/2$ y $5\hbar\omega/2$. Grafique la probabilidad de hallar la partícula en función de x y compare con el caso clásico. ¿Qué puede decir respecto de la paridad de las autofunciones de $\hat{H}$?

16. Calcule para el estado fundamental del oscilador armónico: $< \hat{T} >, < \hat{V} >, < \hat{H} >, < \hat{x} >, < \hat{p} >$ y $\Delta x \Delta p$.