Curso de verano 2022 Cátedra Bochicchio

Serie 13: Formalización de la Mecánica Cuántica

1. Confirme que los siguientes operadores son hermíticos:

   (a) $T = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

   (b) $L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \phi}$

   Nota: considerar las integrales $\int_{\infty}^{\infty} \Psi^* T \Psi$ y $\int_{\infty}^{\infty} \Psi^* L_z \Psi$ e integrar por partes.

2. Demostrar que las combinaciones lineales de los operadores $\hat{A}+i\hat{B}$ y $\hat{A}-i\hat{B}$ no son hermíticas aunque $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sí lo sean.

3. Demostrar que si un operador $\hat{F}$ es hermítico, el valor medio de la magnitud física F es real. Definición: decimos que el operador $\hat{F}$ es hermítico si y solo si $\hat{F}^t = \hat{F}^*$, es decir si

$$\int \phi^* \hat{F}\psi = \int \psi \left(\hat{F}\phi\right)^*$$

4. Hallar la expresión del operador $\hat{p}_x$ en la representación de coordenadas y la del operador $\hat{x}$ en la representación de los momentos. Demostrar que son hermíticos.

5. Determinar cuáles de las siguientes funciones son autofunciones del operador $\hat{p}_x$ y del operador $\hat{p}_x^2$:

   (a) $\psi(x) = A\sin(kx)$

   (b) $\psi(x) = A\cos(kx) + iA\sin(kx)$

   (c) $\psi(x) = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx)$

   (d) $\psi(x) = A\sin(kx) + A\cos(kx)$

   (e) $\psi(x) = A\exp i(x-a); \quad a = cte$

   (f) $\psi(x) = A\exp(ikx) + iA\exp(-ikx)$

   (g) $\psi(x) = A\exp(ax^2) \qquad a = cte, real$

   (h) $\psi(x) = A\exp(ax) \qquad a = cte, real$

6. Determinar para qué potenciales $V(x)$, las siguientes funciones son autofunciones del operador energía $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$ (Hamiltoniano)

   (a) $\psi(x) = A\exp(ax) + B\exp(-ax)$

   (b) $\psi(x) = A\exp(ikx) + iB\exp(-ikx)$

   (c) $\psi(x) = A\exp(-ax^2/2)$

7. Sea una partícula en una dimensión cuya función de onda es

$$\psi(x) = A\frac{\exp(ip_0 x/\hbar)}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

   donde a, p_0 y A son constantes.

(a) Determinar A para que la densidad de probabilidad esté normalizada.

(b) Si se mide la posición de la partícula, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado esté comprendido entre $-a/\sqrt{3}$ y $a/\sqrt{3}$?

(c) Calcular el valor medio del operador $\hat{p}_x$.

8. * Sea la siguiente función de onda:

$$\psi(x) = A \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right\} e^{ip_0x/\hbar}$$

Hallar:

(a) La distribución de probabilidades en x y el valor de la constante A.

(b) $< x >$y $< p_x >$, y las dispersiones correspondientes.

(c) La función de distribución del impulso $\phi(p)$ y la distribución de probabilidades en p.

(d) El valor medio de la energía cinética.

(e) $\psi(x,t)$ y la distribución de probabilidades para x y para p en el instante t.

(f) Δx y Δp en el instante t, y el movimiento del centro del paquete.

9. Sea la siguiente función de onda:

$$\psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{k_0^2}\right] e^{i(kx-\omega t)} dk$$

donde k_0 es una constante positiva y $A = 1/\sqrt{k_0}$. Calcular el valor medio del impulso lineal p_x y su dispersión.

10. Se define el conmutador entre dos operadores lineales $\hat{A}$ y $\hat{B}$ como:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \phi \equiv \hat{A}\left(\hat{B}\phi\right) - \hat{B}\left(\hat{A}\phi\right)$$

donde ϕ es una función arbitraria. Algunas de las propiedades de los conmutadores son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{A}, \hat{B}\right] &= -\left[\hat{B}, \hat{A}\right] \\
\left[\hat{A}, \hat{A}\right] &= 0 \\
\left[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}\right] &= \left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{B}, \hat{C}\right] \\
\left[\hat{A} \star \hat{B}, \hat{C}\right] &= \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}
\end{aligned}$$

Calcular $[\hat{x}, \hat{p}_x]$, $\left[\hat{x}, \hat{p}_x^2\right]$,$\left[\hat{x}^{-1}, \hat{p}_x\right]$,$[\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x, \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y]$ y sus variantes intercambiando las cooordenadas, $\left[\hat{x}, \hat{H}\right]$ y $\left[\hat{p}_x, \hat{H}\right]$. Nota: considere que $\hat{H} = \hat{p}_x^2/2m + V(\hat{x})$.

11. Mostrar que si dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan $\left(\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0\right)$, entonces existe una base de autofunciones ϕ común a ambos operadores $\left(es\ decir\ \hat{A}\phi = \alpha\phi\ y\ \hat{B}\phi = \beta\phi\right)$.

12. Si $\psi(x)$ es una función normalizable y continua, puede escribirse en términos de las autofunciones $\phi(x)$ de un operador hermítico $\hat{A}$ de la siguiente manera

$$\psi(x) = \sum_i c_i \phi_i(x)$$

con $\hat{A}\phi_i(x) = a_i \phi_i(x)$.

    (a) Obtener una expresión para los coeficientes c_i.

    (b) Calcular el valor medio de A. Interpretar físicamente la cantidad $|c_i|^2$.

13. El operador $\exp\left(\hat{A}\right)$ posee significado si se lo desarrolla en serie de potencias:

$$\exp\left(\hat{A}\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n$$

Mostrar que si ϕ es un autoestado de $\hat{A}$ con autovalor a, entonces es también autoestado de $\exp\left(\hat{A}\right)$. Determinar el autovalor.

14. Sea $\hat{H}$ el operador hamiltoniano de un sistema físico y $\phi_n(x)$ sus autoestados con autovalor E_n. Para un operador arbitrario $\hat{A}$ probar que $\left\langle \left[\hat{H}, \hat{A}\right]_n \right\rangle = 0$, donde el subíndice n indica que el valor medio se toma sobre el estado $\phi_n(x)$.

15.

    (a) A partir de la ecuación de Schrödinger, y teniendo en cuenta que $\hat{H}$ es hermítico, demostrar que:

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \left[\hat{A}, \hat{H}\right] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

    (b) Con el resultado del punto anterior hallar $\langle \dot{x} \rangle$ y $\langle \dot{p} \rangle$ (teorema de Ehrenfest). Interpretar físicamente el resultado.

16. Dada la función de onda:

$$\psi(x) = \begin{cases} A(1+ax)\exp(ax) & para \quad x \leq 0 \\ A(1-ax)\exp(-ax) & para \quad x \geq 0 \end{cases}$$

    (a) Normalizar esta función de onda.

    (b) Hallar la energía total E y la potencial $V(x)$ suponiendo que $V(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$.

    (c) Calcular los valores medios de x, p y la dispersión correspondiente a cada uno.