Curso de verano 2022 Cátedra Bochicchio

Serie 14: Momento Angular

1. Evaluar los conmutadores $[L_i, L_k]$ en la representación de coordenadas, donde los indices i y k indican las componentes x, y, z de los operadores.

2. Evaluar los conmutadores $\left[\hat{L}_y^2, \hat{L}_x\right]$, $\left[\hat{L}_y^2, \hat{L}_x^2\right]$ y $\left[\hat{L}_x, \left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right]\right]$.
   Nota: recordar las propiedades de los conmutadores.

3. Calcular $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ y $\hat{L}_z$ en coordenadas esféricas. Ayuda: recuerde que: $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$. Utilizar los operadores en la representación coordenadas y la definición de las coordenadas esféricas para evaluar las derivadas. Calcule $\hat{L}^2 \equiv \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ en la misma representación. Mostrar que las autofunciones de $\hat{L}_z$ y $\hat{L}^2$:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z Y_{lm}(\phi) &= \hbar\lambda_m Y_{lm}(\theta\,\phi) \\ \hat{L}_2 Y_{lm}(\theta\,\phi) &= \hbar^2\lambda_l Y_{lm}(\theta\,\phi) \end{aligned}$$

   son los armónicos esféricos. Calcular los autovalores.

4. *

   (a) Encuentre cuál es el efecto que tiene una rotación en un ángulo α alrededor del eje $\mathbf{z}$ sobre los siguientes orbitales del átomo de H (use el operador de rotación $\hat{R} = \exp[-i\alpha L_z/\hbar]$):
   i) $2s$ *ii)* $2p_x$ *iii)* $2p_y$ y *iv)* $2p_z$. En particular, considere el caso $\alpha = \pi/2$.

   (b) Encuentre la densidad de probabilidad en todo el espacio para el electrón en el nivel n=2 y verifique que es isótropa.

5. Verificar por medio del cálculo matricial que las siguientes matrices (matrices de Pauli):

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   satisfacen las relaciones de conmutación del momento angular si escribimos $\sigma_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i$, $i \in \{x, y, z\}$, y entonces provee una representación matricial para el momento angular. Mostrar que esta representación particular corresponde al caso $s = 1/2$. Ayuda: formar la matriz para s^2 y hallar sus autovalores.

6. * Considere una partícula de spin 1/2 en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\mathbf{z}$. Suponga que, a $t = 0$, la función de onda de spin de la partícula es:

$$\sigma = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}\alpha + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}\beta$$

   donde αy β son las autofunciones del operador S_z, θ y φ representan los ángulos polares. Esta función de onda es autofunción del operador $S_u = \vec{S}\cdot\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es la dirección del espacio definida por los ángulos θ y φ(es decir, la componente del spin en la dirección $\mathbf{u}$).

   (a) Escriba el hamiltoniano de interacción de la partícula con el campo magnético.

   (b) Encuentre las constantes de movimiento del sistema.

   (c) Calcule la función de onda $\sigma(t)$ para cualquier instante arbitrario $t > 0$. ¿Qué pasa con los ángulos θ y φ al tiempo t? Interprete este resultado.

   (d) Calcule el valor medio de S_z. ¿Cuál es su dependencia con el tiempo? Interprete.

7. Utilizando las matrices de Pauli, reducir los productos de operadores $s_x s_y$, $s_x s_y^2 s_z^2$ y $s_x^2 s_y^2 s_z^2$ a un operador de spin simple.
   Nota: escribir $s_x s_y = 2\sigma_x \sigma_y \hbar/4$ y evaluando el producto matricial observar que $s_x s_y \propto s_z$, etc.

8. Calcular los elementos de matriz

   (a) $< 0,0|l_z|0,0 >$

   (b) $< 1,1|l^+|0,0 >$

   (c) $< 2,1|l^+|2,0 >$

   (d) $< 2,2|(l^+)2|2,0 >$

   (e) $< 2,0|(l^+)(l^-)|2,0 >$

   (f) $< 2,0|(l^-)(l^+)|2,0 >$

   (g) $< 2,0|(l^-)2(l_z)l(l^+)|2,0 >$

   Tener en cuenta la notación: $< l', m_l'|A|l, m_l >$

9. Mostrar que si $[j_{1q}, j_{2q'}] = 0$ para todo q, q', entonces $j_1 \times j_2 = -j_2 \times j_1$. Realizar en particular el cálculo que muestra que en caso que valga $j_k \times j_k = i\hbar j_k$ con $k = 1, 2$, entonces $j \times j = i\hbar j$ donde $j = j_1 + j_2$. ¿Es $j_1 - j_2$ un momento angular?

10. Determinar que momento angular total es posible en las configuraciones siguientes:

    (a) $j_1 = 3$, $j_2 = 4$

    (b) dos electrones en un orbital con $l_1 = l_2 = 1$ (orbitales tipo p)

    (c) dos electrones en un orbital con $l_1 = l_2 = 2$ (orbitales tipo d)

    (d) dos electrones en la configuración pd

    (e) el momento angular total spin de cuatro electrones.

    Nota: Utilizar las series de Clebsh-Gordan sucesivamnete en e).

11. Determinar los coeficientes de acoplamiento vectoriales para un sistema con $j_1 = 1$ y $j_2 = 1/2$. Evaluar los elementos de matriz $< j'm'|j1_z|jm >$.