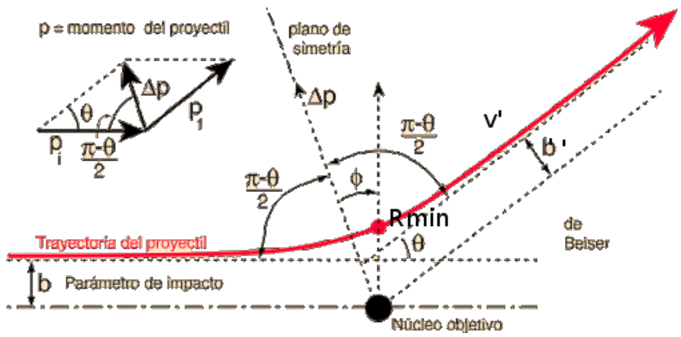
Guía 6: Scattering de Rutherford, átomo de Bohr, postulados de De Broglie

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríban a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 1: Un haz de partículas α del polonio (energía cinética: 5.30 MeV) de una intensidad de 10000 partículas por segundo, incide normalmente sobre una lámina de oro de densidad 19.3 g/cm^3 y espesor $10^{-5}cm$. A $10cm$ de distancia de la lámina se coloca un detector para partículas α, con una apertura de $1cm^2$, de tal manera que la dirección del haz de partículas forme un ángulo de ϕ grados con la recta que une el centro del detector con el punto de la lámina donde inciden las partículas. Calcúlese el número de impulsos por hora registrados por el detector para $\phi = 5, 10, 15, 30$ y $60°$.

Solución: Dispersión de partículas α o dispersión de Rutherford



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/rutsca.html

Se puede tratar de manera no relativista puesto que $\dfrac{v}{c} \sim \dfrac{1}{20}$.

Tenemos conservación del momento angular por ser un problema de fuerzas centrales: $\ell_z = mr^2\dot{\theta} = mvb = mv'b'$

Se conserva la energía cinética: $\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m(v')^2$.

Además la componente radial de la fuerza coulombiana:

$$\frac{zZe^2}{r^2} = m(\ddot{r} - r^2\dot{\theta}^2) \tag{1}$$

Se arranca con el siguiente cambio de variables $r = 1/u$, y luego de un rato de cuentas se llega a que:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{zZe^2m}{\ell_z} \equiv -\frac{D}{2b^2} \tag{2}$$

donde se introduce el parámetro de impacto b y $D = \dfrac{zZe^2}{mv^2/2} = \dfrac{zZe^2}{E_k}$

Se plantea como solución de esta ecuación:

$$u = A\cos\theta + B\text{sen}\theta - \frac{D}{2b^2} \tag{3}$$

A y B se obtienen en los límites: $\theta \to 0$, $r \to \infty$, $\dfrac{dr}{dt} \to -u$

De esta manera se obtiene como solución una hipérbola en coordenadas polares:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b}\text{sen}\theta + \frac{D}{2b^2}(\cos\theta - 1) \tag{4}$$

$\theta = 0$ no es interesante.

Si $r \to \infty$ se obtiene el ángulo de dispersión:

$$\frac{2b}{D} = \frac{1 - \cos\theta}{\mathrm{sen}\theta} = \mathrm{tg}(\theta/2) \tag{5}$$

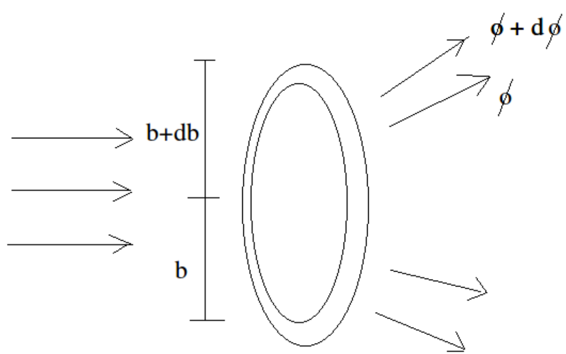
Puesto que $\phi = \pi - \theta$ y se llega a que $\mathrm{cotg}(\phi/2) = \dfrac{2b}{D}$ y el acercamiento máximo es para el plano de simetría:

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \phi \tag{6}$$

De esta manera se determina R_{min}:

$$R_{min} = \frac{D}{2}\left[1 + \frac{1}{\mathrm{sen}(\phi/2)}\right] \tag{7}$$

Veamos como se vinculan las partículas α en función de la incidencia y cómo se dispersan.



El área de los anillos es $2\pi b db$ y el número de anillos es ρt, pero no todos pasan, asi que la probabilidad que pase por ellos es.

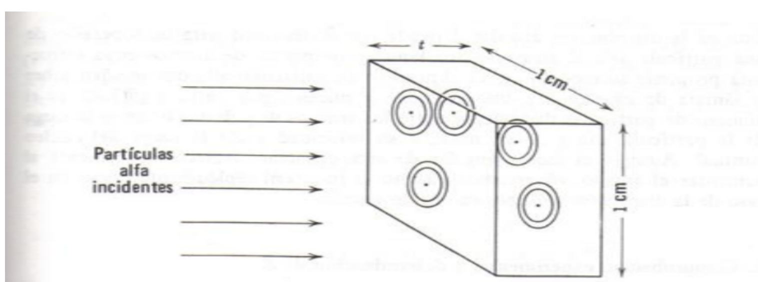


Figura 4-11. Un haz de partículas alfa que incide sobre una lámina cuya área es de 1 cm^2. En la realidad, los anillos son mucho más pequeños y mucho más numerosos.

ojo, t es el volumen de porción de la lámina.

$$P(b)db = \rho t 2\pi b db \tag{8}$$

Sabiendo que:

$$b = \frac{D}{2}\mathrm{cotg}(\phi/2) \Rightarrow db = -\frac{D d\phi}{\mathrm{sen}^2(\phi/2)} \tag{9}$$

Con lo cual

$$P(b)db = -\frac{\pi}{8}\rho t D^2 \frac{\text{sen}\phi d\phi}{\text{sen}^4(\phi/2)} \tag{10}$$

pero $-P(b)db$ es la probabilidad de tener partículas dispersadas entre ϕ y $\phi + d\phi$.

$$\boxed{n(\phi)d\phi = n\frac{\pi}{8}\rho t \left(\frac{zZe^2k_e}{E}\right)^2 \frac{\text{sen}\phi d\phi}{\text{sen}^4(\phi/2)}} \tag{11}$$

Ahora queda reemplazar valores: $t = 10^{-5}cm$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$, $E = 5,3\text{MeV}$, $1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{J}$ en una hora: $n = 10000 \cdot 3600$, $k_e = \dfrac{1}{4\pi\mu_e} = 9 \cdot 10^9 Nm^2/c^2$, $Z_{Au} = 79$, $Z_\alpha = 2$

$\rho_{Au} = \dfrac{\delta_{Au}N_A}{M_{Au}} = 5,9 \cdot 10^{22} mol/cm^3$

Falta ver para los distintos ángulos calcular el número de partículas dispersadas.