FÍSICA 4

SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2023

GUÍA 7: PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE, OPERADORES, SCHRÖDINGER

1. Verifique el principio de incerteza para las siguientes funciones de onda (discuta cuidadosamente el tercer ítem).

   a) $\psi(x) = A\exp(-a^2x^2)$

   b) $\psi(x) = \begin{cases} A\exp(ax) & x \leq 0 \\ A\exp(-ax) & x \geq 0 \end{cases}$

   c) $\psi(x) = \begin{cases} A\exp(ip_0x/\hbar) & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

2. Utilice el principio de incerteza para estimar el orden de magnitud del diámetro de un átomo de hidrógeno. Compare el resultado con el radio de Bohr de la primera órbita. **Ayuda**: suponga que el electrón está confinado en una región de longitud δx. Esto implica que tiene una energía cinética no nula, pero además que hay una energía potencial del orden de magnitud de $-e^2/\delta x$. Halle entonces δx de manera tal que la energía total sea un mínimo y evalúe la expresión para ésta.

3. * Mostrar que si uno define

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{<x^2> - <x>^2} \\ \Delta p &= \sqrt{<p^2> - <p>^2} \end{aligned}$$

   es decir que se usa el valor cuadrático medio, entonces la relación de incerteza de Heisenberg se lee

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

   Ayuda: Considere primero la integral

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x\psi(x) + \lambda \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right|^2 dx$$

   con $\lambda \in \Re$. Nótese que $I(\lambda) \geq 0$. Desarrollar el integrando, usar la definición de valores medios y el hecho que $I(\lambda)$ será una forma cuadrática en λ, definida positiva. Para obtener el resultado general, repita el procedimiento con la función $exp\{i<p>x/\hbar\}\,\psi(x-<x>)$.

4. Demuestre que si un operador $\hat{F}$ es hermítico, el valor medio de la magnitud física F a la que está asociado es real. Recordar que decimos que un operador $\hat{F}$ es hermítico cuando $\hat{F}^t = \hat{F}^*$, es decir si

$$\int \phi^* \hat{F} \psi \, dx = \int \psi \left(\hat{F}\phi\right)^* dx$$

5. Hallar la expresión del operador $\hat{p}_x$ en la representación de coordenadas y la del operador $\hat{x}$ en la representación de los momentos. Muestre que son hermíticos.

6. Determine cuáles de las siguientes funciones son autofunciones del operador $\hat{p}_x$ y del operador $\hat{p}_x^2$:

    a) $\psi(x) = A\sin(kx)$
    b) $\psi(x) = A\cos(kx) + iA\sin(kx)$
    c) $\psi(x) = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx)$
    d) $\psi(x) = A\sin(kx) + A\cos(kx)$
    e) $\psi(x) = A\exp i(x-a); \quad a = cte$
    f) $\psi(x) = A\exp(ikx) + iA\exp(-ikx)$
    g) $\psi(x) = A\exp(ax^2) \qquad a = cte, real$
    h) $\psi(x) = A\exp(ax) \qquad a = cte, real$

7. Muestre que las combinaciones lineales de los operadores $\hat{A} + i\hat{B}$ y $\hat{A} - i\hat{B}$ no son hermíticas aunque $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sí lo sean.

8. Determinar para qué potenciales $V(x)$ las siguientes funciones son autofunciones del operador hamiltoniano $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$

    a) $\psi(x) = A\exp(ax) + B\exp(-ax)$
    b) $\psi(x) = A\exp(ikx) + iB\exp(-ikx)$
    c) $\psi(x) = A\exp(-ax^2/2)$

9. Dada una partícula cuya función de onda en un espacio unidimensional es

$$\psi(x) = A\frac{\exp(ip_0x/\hbar)}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

    donde a, p_0 y A son constantes:

    a) Halle A para que la densidad de probabilidad esté normalizada.
    b) Si se mide la posición de la partícula, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado esté comprendido entre $-a/\sqrt{3}$ y $a/\sqrt{3}$?
    c) Calcule el valor medio del operador $\hat{p}_x$.

10. Considere la siguiente función de onda:

$$\psi(x) = A\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right\}e^{ip_0x/\hbar}.$$

    Hallar:

    a) La distribución de probabilidades en x y el valor de la constante A.
    b) $< x >$ y $< p_x >$, y las dispersiones correspondientes.
    c) La función de distribución del impulso $\phi(p)$ y la distribución de probabilidades en p.
    d) El valor medio de la energía cinética.
    e) $\psi(x,t)$ y la distribución de probabilidades para x y para p en el instante t.
    f) Δx y Δp en el instante t, y el movimiento del centro del paquete.

11. Sea la siguiente función de onda:

$$\psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{k_0^2}\right] e^{i(kx-\omega t)} dk$$

donde k_0 es una constante positiva y $A = 1/\sqrt{k_0}$. Calcular el valor medio del impulso lineal p_x y su dispersión.

12. **Conmutadores**. Se define el conmutador entre dos operadores lineales $\hat{A}$ y $\hat{B}$ como:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]\phi \equiv \hat{A}\left(\hat{B}\phi\right) - \hat{B}\left(\hat{A}\phi\right)$$

donde ϕ es una función arbitraria. Algunas de las propiedades de los conmutadores son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{A},\hat{B}\right] &= -\left[\hat{B},\hat{A}\right] \\
\left[\hat{A},\hat{A}\right] &= 0 \\
\left[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}\right] &= \left[\hat{A},\hat{C}\right] + \left[\hat{B},\hat{C}\right] \\
\left[\hat{A}\star\hat{B},\hat{C}\right] &= \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}
\end{aligned}$$

Calcular $[\hat{x},\hat{p}_x]$, $\left[\hat{x},\hat{p}_x^2\right]$, $\left[\hat{x}^{-1},\hat{p}_x\right]$, $[\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x, \hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y]$ y sus variantes intercambiando las cooordenadas, $\left[\hat{x},\hat{H}\right]$ y $\left[\hat{p}_x,\hat{H}\right]$. Nota: considere que $\hat{H} = \hat{p}_x^2/2m + V(\hat{x})$.

13. Demostrar que si dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan $\left(\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0\right)$, entonces existe una base de autofunciones ϕ común a ambos operadores (es decir $\hat{A}\phi = \alpha\phi$ y $\hat{B}\phi = \beta\phi$)

14. **Estado superposición**. Si $\psi(x)$ es una función normalizable y continua, puede escribirse en términos de las autofunciones $\phi(x)$ de un operador hermítico $\hat{A}$ de la siguiente manera:

$$\psi(x) = \sum_i c_i\phi_i(x)$$

con $\hat{A}\phi_i(x) = a_i\phi_i(x)$.

a) Obtenga una expresión para los coeficientes c_i.

b) Calcule el valor medio de A e interprete físicamente la cantidad $|c_i|^2$.

15. El operador $\exp\left(\hat{A}\right)$ posee un significado concreto si se lo desarrolla en serie de potencias:

$$\exp\left(\hat{A}\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{A}^n$$

Muestre que si ϕ es un autoestado de $\hat{A}$ con autovalor a, entonces es también autoestado de $\exp\left(\hat{A}\right)$. Determine el autovalor.

16. Sea $\hat{H}$ el operador hamiltoniano de un sistema físico y $\phi_n(x)$ sus autoestados con autovalor E_n. Para un operador arbitrario $\hat{A}$, probar que $\left\langle\left[\hat{H},\hat{A}\right]_n\right\rangle = 0$, donde el subíndice n indica que el valor medio se toma sobre el estado $\phi_n(x)$.

17.

a) A partir de la ecuación de Schrödinger, y teniendo en cuenta que $\hat{H}$ es hermítico, demuestre que:

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{A},\hat{H}\right]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle$$

b) Con el resultado del punto anterior calcule $\langle \dot{x} \rangle$ y $\langle \dot{p} \rangle$ (teorema de Ehrenfest) e interprete físicamente el resultado.

18. Dada la función de onda:
$$\psi(x) = \begin{cases} A(1+ax)\exp(ax) & para \quad x \leq 0 \\ A(1-ax)\exp(-ax) & para \quad x \geq 0 \end{cases}$$

    a) Normalizar esta función de onda.

    b) Hallar la energía total E y la potencial $V(x)$ suponiendo que $V(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$.

    c) Calcular los valores medios de x, p y la dispersión correspondiente a cada uno.

19. **Ecuación de Schrödinger**. Escriba la ecuación de Schrödinger para:

    a) una partícula libre

    b) una partícula bajo la influencia de una fuerza uniforme y constante

    c) El átomo de hidrógeno.

    d) El átomo de helio.

    e) Un oscilador armónico cuántico.

20. **Potencial dependiente del tiempo**. Mostrar que la ecuación de Schrödinger es separable cuando el potencial de interacción $V(t)$ depende solamente del tiempo y es uniforme en el espacio. Resolver las ecuaciones resultantes cuando $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$. ¿Es estacionaria la función de estado resultante?

21. **Operador paridad**. El operador paridad Π se define mediante la relación
$$\Pi\psi(x) = \psi(-x)$$

    a) Muestre que las autofunciones de Π son simétricas o antisimétricas, con autovalores $+1$ ó -1 respectivamente.

    b) Vea que si $\hat{H}(\hat{x}) = \hat{H}(-\hat{x})$, $\hat{H}(\hat{x})$ conmuta con Π. ¿Qué se puede decir de la paridad de las autofunciones de $\hat{H}$?