

FÍSICA 4

SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2023

GUÍA 8: POTENCIALES EN UNA DIMENSIÓN. OSCILADOR ARMÓNICO CUÁNTICO

1. **Pozo infinito de potencial (centrado).** Considere el siguiente potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a/2 \\ \infty & |x| > a/2 \end{cases}$$

donde a es una constante y representa el ancho del pozo.

- Halle las autofunciones de \hat{H} y los niveles de energía de una partícula de masa m .
 - Grafique $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y φ_4 y sus módulos al cuadrado, donde las φ_i son las funciones de onda de los primeros cuatro estados de la partícula.
 - Calcule la probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo $(0, a/4)$ para estos cuatro autoestados.
 - Calcule $\langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle, \Delta x, \Delta p$ y $\Delta x \Delta p$ para los mismos cuatro estados.
 - Calcule y grafique la probabilidad de que la partícula tenga momento lineal p para el primer autoestado y para uno de n grande.
 - Escriba una expresión general para $\psi(x, t)$.
2. Para comprimir una “caja” dentro de la cual se encuentra una partícula se necesita cierta energía. Esto sugiere que la partícula ejerce una fuerza sobre las paredes del recinto. Con esta hipótesis en mente, y considerando que cuando la longitud de la “caja” cambia en dL , la energía cambia por medio de $dE = -F dL$, calcule la expresión de la fuerza F . ¿A qué distancia se obtiene $F = 1 \text{ N}$ cuando un electrón se encuentra en el estado con número cuántico $n = 1$?

3. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

Encuentre las autofunciones de \hat{H} y una ecuación para sus autovalores, para $E < 0$.

4. **Pozo finito de potencial.** Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & 0 < |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

con $a > 0$. Encuentre las autofunciones de H y una ecuación para sus autovalores cuando $E < 0$. Compare con las soluciones del pozo infinito.

5. **Doble pozo simétrico.** Considere el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > b \\ V_0 & a < |x| < b \\ 0 & |x| < a \end{cases}$$

donde a, b y V_0 son constantes positivas. Encuentre las ecuaciones de autovalores y escriba las funciones de onda correspondientes para los casos:

a) $0 < E < V_0$

b) $E > V_0$

6. Resuelva nuevamente el problema del pozo finito de potencial, pero esta vez con $E > 0$. Calcule los coeficientes de reflexión y de transmisión.

7. **Barrera de potencial.** Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

con $a > 0$. Encuentre los coeficientes de reflexión y transmisión para los siguientes rangos de energía de la partícula:

a) $0 < E < V_0$

b) $E > V_0$.

Discuta el significado físico de los resultados hallados.

8. **Potencial tipo Delta de Dirac.** Considere un potencial de la forma $V(x) = -\alpha\delta(x)$, con $\alpha > 0$.

a) Resuelva la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo cuando $E < 0$. ¿Cuántos estados ligados obtiene? Ajuste los parámetros de su problema de manera adecuada para que este potencial se utilice como representación modelo del problema del átomo de hidrógeno.

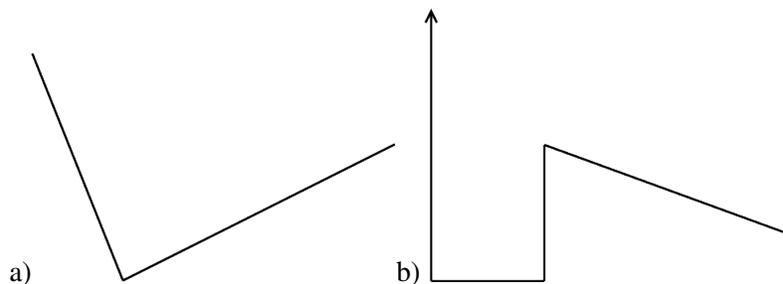
b) Resuelva ahora el problema para $E > 0$. Calcule en este caso los coeficientes de transmisión y de reflexión.

9. **Potencial doble Delta de Dirac.** Suponga que tiene un potencial especificado de la siguiente manera $V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$, con $a, \alpha > 0$.

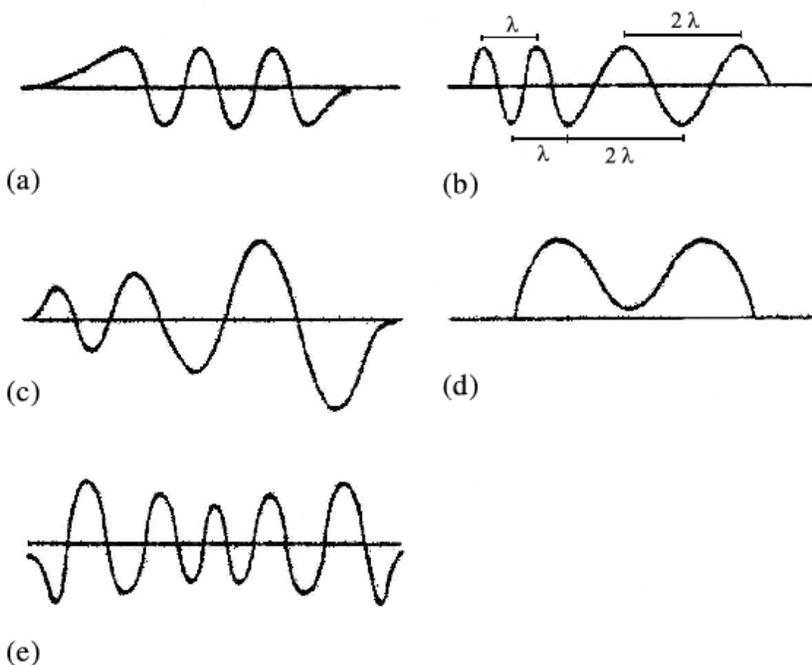
a) Encuentre los posibles estados ligados para $E < 0$. ¿Qué sistema físico podría modelar este potencial? Elija sus parámetros para lograr esa situación.

b) Resuelva el problema de *scattering* para este potencial y encuentre los coeficientes de transmisión y reflexión.

10. Analice en cuáles de los siguientes potenciales existe al menos un estado ligado. Para aquéllos en donde los haya, realice gráficos cualitativos de las autofunciones de \hat{H} para varios valores de energía.



11. Dados los siguientes gráficos de autofunciones de \hat{H} , haga un diagrama cualitativo de los potenciales unidimensionales que las producen, marcando en cada caso una línea horizontal para la energía del sistema e indicando de qué nivel se trata (tome al estado fundamental como $n = 1$).



12. Sea un oscilador armónico con Hamiltoniano $H = p^2/2m + (m\omega^2/2)x^2$. Hallar β para que $\phi_0 = A_0 \exp(-\beta x^2)$ sea autofunción de \hat{H} . ¿Cuál es la energía de este estado? ¿Qué argumentos usaría para demostrar que es el estado fundamental?
13. Proponiendo que $\phi(x) = h(x) \exp(-\beta x^2)$ es autofunción del hamiltoniano del oscilador armónico \hat{H} , hallar la ecuación diferencial que debe satisfacer $h(x)$. Muestre que $h(y) = y$ y $h(y) = (1 - 2y^2)$ con $y \equiv \sqrt{2\beta}x$ son soluciones con autovalores $3\hbar\omega/2$ y $5\hbar\omega/2$. Grafique la probabilidad de hallar la partícula en función de x y compare con el caso clásico. ¿Qué puede decir respecto de la paridad de las autofunciones de \hat{H} ?
14. Calcule para el estado fundamental del oscilador armónico: $\langle \hat{T} \rangle$, $\langle \hat{V} \rangle$, $\langle \hat{H} \rangle$, $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$ y $\Delta x \Delta p$.
15. Considere un pozo infinito unidimensional de ancho a que en un momento dado se expande súbitamente hasta duplicar su ancho (*i.e.* pasa de $[0, a]$ a $[0, 2a]$). La partícula que hay dentro, antes de la expansión se encuentra en el estado fundamental. Se pide:
- Un gráfico del perfil de la función de onda en el instante inmediatamente posterior a la expansión, las nuevas autoenergías del hamiltoniano y los correspondientes períodos de oscilación (los períodos de oscilación de las autofunciones asociadas a cada energía).
 - El tiempo que debe dejarse transcurrir para poder restaurar el pozo a su anchura original, de modo tal que la función de onda vuelva a ser la correspondiente al estado fundamental del pozo de lado a .
 - Suponiendo que la función de onda del pozo expandido puede aproximarse por sus dos componentes de más baja energía, calcular en función del tiempo la probabilidad de encontrar a la partícula en la mitad nueva del pozo (o sea, entre a y $2a$).

16. Sea una partícula de masa m en un pozo de potencial infinito de ancho a . En $t = 0$ el estado del sistema es $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, donde las $\varphi_n(x)$ son las autofunciones de \hat{H} .
- ¿Cuál es la probabilidad P de que una medición de la energía de la partícula, efectuada en un instante t cualquiera, dé un resultado mayor que $5E_1$, siendo E_1 la energía del estado fundamental? Si $P = 0$, ¿cuáles coeficientes deben ser cero y cuáles no?
 - Si solo c_1 y c_2 son distintos de cero, normalizar la función de onda a $t = 0$ en función de ellos y calcular el valor medio de la energía en este estado. ¿Cuánto deben valer $|c_1|^2$ y $|c_2|^2$ para que sea $\langle H \rangle = 2,5E_1$? Si además $\langle \hat{x} \rangle = a/3$, calcular la fase de c_2 si c_1 es real y positivo.
 - Calcular $\varphi(x)$ y $\langle \hat{x} \rangle$ para un tiempo t .
 - Calcular $\langle p \rangle$ para todo tiempo por dos métodos: directamente y usando el teorema de Ehrenfest.