16- Demostrar que para un átomo en un alto estado descripto por n, l, s, j y m_j vale que $(l > 0)$:

$$\langle \hat{s}\cdot\hat{l} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} l \hbar^2 & j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(l+1)\hbar^2 & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

(Nota: al término $\langle \hat{s}\cdot\hat{l} \rangle$ se lo conoce como acoplamiento spin-órbita)

¿Qué pasa si $l = 0$?

Vamos a denotar el estado descripto por todos esos números cuánticos como:

$|\Psi\rangle = |n\, l\, s\, j\, m_j\rangle$

$\langle\Psi| = \langle n\, l\, s\, j\, m_j|$ es como Ψ^* ; el valor medio del acoplamiento spin-órbita queda

$$\langle \hat{s}\cdot\hat{l} \rangle = \langle n l s j m_j | \hat{s}\, \hat{l} | n l s j m_j \rangle$$

por otro lado sabemos que:

$$J^2 = (L+S)^2 = L^2 + S^2 + 2\hat{L}\hat{S} \Rightarrow \hat{S}\hat{L} = \frac{J^2 - L^2 - S^2}{2}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{s}\hat{l} \rangle = \langle n l s j m_j | \left(\frac{J^2 - L^2 - S^2}{2} \right) | n l s j m_j \rangle =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right]$$

Si $j = l + \frac{1}{2} \Rightarrow \langle \hat{s}\cdot\hat{l} \rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[(l+\frac{1}{2})(l+\frac{3}{2}) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] =$

$\downarrow$

$s = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\hbar^2 \left[l^2 + \frac{3l}{2} + \frac{l}{2} + \frac{3}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle \hat{s}\cdot\hat{l} \rangle = \frac{1}{2} l \hbar^2}$$

Si $j = l - \frac{1}{2} \Rightarrow \langle \hat{s}\hat{l} \rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[(l-\frac{1}{2})(l+\frac{1}{2}) - l(l+1) + \frac{1}{4} \right] =$

$\downarrow$

$s = -\frac{1}{2}$

$= \hbar^2 [l^2 - 1 \quad l^2 - l - 1 , 1] \Rightarrow \boxed{\langle \hat{s}\hat{l} \rangle = -\frac{1}{2}(l+1)\hbar^2}$