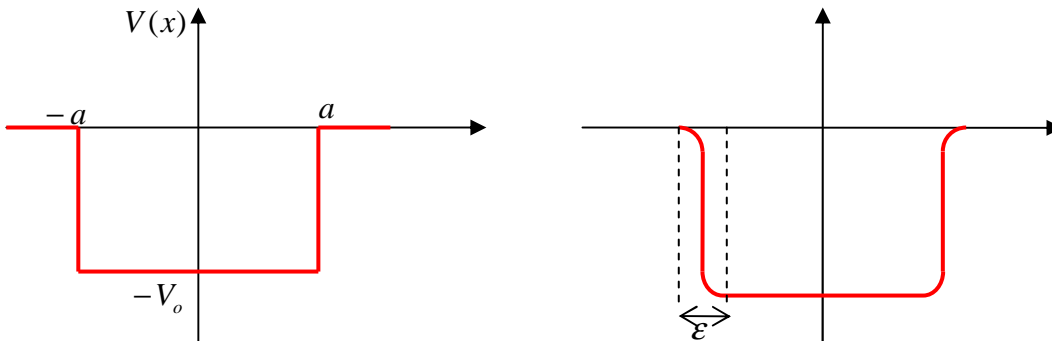


### Clase 19: Potenciales en una dimensión – Pozo finito

Vamos a resolver algunos problemas de potenciales en una dimensión. Qué significa *resolver* en mecánica cuántica? Pues resolver un potencial es encontrar las energías y los estados posibles de una partícula sometida a ese potencial.

- Sea una partícula que se encuentra en una zona donde el potencial es un pozo finito.



Podría ser una versión ultrasimplificada de un núcleo atómico. Por supuesto, es una aproximación ya que no existen potenciales discontinuos, pero es una buena aproximación mientras la región de variación sea mucho menor que las dimensiones típicas del problema, es decir, el ancho del pozo,  $\epsilon \ll 2a$ . También, teniendo en cuenta las propiedades ondulatorias de la partícula, tenemos que pedir que  $\epsilon \ll \Delta\lambda$ , donde  $\Delta\lambda$  es el orden de magnitud de la longitud de onda de la partícula.

El potencial es:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -a & \text{región 1} \\ -V_0 & -a \leq x \leq a & \text{región 2} \\ 0 & x \geq a & \text{región 3} \end{cases}$$

Vamos a calcular los estados estacionarios, por lo que, como hemos visto, la parte temporal de la función de onda se factoriza:

$$\psi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad \text{donde } \omega = \frac{E}{\hbar}$$

Consideramos la ecuación de Schrödinger para el caso estacionario:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \varphi(\vec{x})e^{-i\omega t} = E\varphi(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad \text{la parte temporal se simplifica.}$$

Como el problema es en una dimensión,  $\nabla^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2}$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \varphi(x) = E\varphi(x)$$

Como el potencial no es continuo, planteamos la ecuación de Schrödinger en cada una de las regiones y empalmamos la solución con las condiciones de contorno.

Tenemos que considerar, además, que hay 2 casos:

a)  $-V_o \leq E \leq 0$

b)  $E > 0$

Las soluciones (y el comportamiento de la partícula, en consecuencia) van a ser distintas considerando los dos casos posibles. (si a alguien se le ocurre plantear el caso  $E < -V_o$ , es libre de hacerlo, pero va a encontrar que la solución es nula). Comencemos por:

- a)  $-V_o \leq E \leq 0$

Para esta zona de energías, los estados son *estados ligados*. Clásicamente, la partícula estaría atrapada en el pozo de potencial.

Planteamos para las tres zonas:

$$1) -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_1(x) = E \varphi_1(x)$$

$$2) -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_2(x) - V_o \varphi_2(x) = E \varphi_2(x)$$

$$3) -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_3(x) = E \varphi_3(x)$$

Noten que no son tres funciones de onda diferentes, sino los tres “trozos” de la función de onda para cada región. Es decir:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & x \leq -a \\ \varphi_2(x) & -a \leq x \leq a \\ \varphi_3(x) & x \geq a \end{cases} \text{ con energía } E$$

Reordenemos las ecuaciones para reconocerlas, liberando la derivada segunda:

$$1) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_1(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E \varphi_1(x) = 0$$

$$2) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_2(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (V_o + E) \varphi_2(x) = 0$$

$$3) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_3(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E \varphi_3(x) = 0$$

Definimos dos constantes (noten que contienen a la energía y que son positivas):

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_o + E) > 0 \quad \gamma^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E > 0 \quad (\text{recuerden que, en este caso, } E < 0)$$

Como  $k$  y  $\gamma$  tienen dos valores posibles ( $< 0$  ó  $> 0$ ), consideremos  $k > 0$  y  $\gamma > 0$ .

Entonces:

$$1) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_1(x) - \gamma^2 \varphi_1(x) = 0$$

$$2) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_2(x) + k^2 \varphi_2(x) = 0$$

$$3) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_3(x) - \gamma^2 \varphi_3(x) = 0$$

Son tres ecuaciones de Euler homogéneas, cuyas soluciones son (elegimos alguna de las posibilidades):

$$1) \varphi_1(x) = A_1 e^{\gamma x} + B_1 e^{-\gamma x}$$

$$2) \varphi_2(x) = C \cos(kx + \alpha)$$

$$3) \varphi_3(x) = A_3 e^{\gamma x} + B_3 e^{-\gamma x}$$

• Para encontrar las constantes y empalmar las tres soluciones, aplicamos las condiciones de contorno.

Una primera condición es que las funciones de onda deben ser acotadas, es decir,  $\rightarrow 0$  en los extremos.

Esto es condición de que sean *estados ligados*. Entonces:

$$\varphi_1(x \rightarrow -\infty) \rightarrow 0 \Rightarrow B_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1(x) = A_1 e^{\gamma x}$$

$$\varphi_3(x \rightarrow +\infty) \rightarrow 0 \Rightarrow A_3 = 0 \Rightarrow \varphi_3(x) = B_3 e^{-\gamma x}$$

Las otras condiciones de contorno son que la función de onda y su derivada deben ser continuas.

Entonces, planteamos en las discontinuidades del potencial, y dividimos las ecuaciones 2 a 2:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(-a) = \varphi_2(-a) &\Rightarrow A_1 e^{-\gamma a} = C \cos(-ka + \alpha) \\ \frac{d\varphi_1}{dx} \Big|_{x=-a} = \frac{d\varphi_2}{dx} \Big|_{x=-a} &\Rightarrow A_1 \gamma e^{-\gamma a} = -kC \operatorname{sen}(-ka + \alpha) \end{aligned} \right\} \gamma = -k \operatorname{tg}(-ka + \alpha) = k \operatorname{tg}(ka - \alpha) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_3(a) = \varphi_2(a) &\Rightarrow B_3 e^{-\gamma a} = C \cos(ka + \alpha) \\ \frac{d\varphi_3}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{d\varphi_2}{dx} \Big|_{x=a} &\Rightarrow -B_3 \gamma e^{-\gamma a} = -kC \operatorname{sen}(ka + \alpha) \end{aligned} \right\} \gamma = k \operatorname{tg}(ka + \alpha) \quad (2)$$

La última condición de contorno es que la función de onda debe estar normalizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x) \varphi(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{-a} \varphi_1^*(x) \varphi_1(x) dx + \int_{-a}^a \varphi_2^*(x) \varphi_2(x) dx + \int_a^{\infty} \varphi_3^*(x) \varphi_3(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{-a} |\varphi_1(x)|^2 dx + \int_{-a}^a |\varphi_2(x)|^2 dx + \int_a^{\infty} |\varphi_3(x)|^2 dx = 1$$

• Las condiciones (1) y (2) deben ser iguales, entonces:

$$k \operatorname{tg}(ka - \alpha) = k \operatorname{tg}(ka + \alpha) \Rightarrow \text{esta condición nos va a dar los posibles valores de } \alpha .$$

Definamos:  $y = ka - \alpha$ :

$$k \operatorname{tg}(y) = k \operatorname{tg}(y + 2\alpha) \Rightarrow 2\alpha = n\pi \Rightarrow \alpha = n \frac{\pi}{2}$$

Dados los posibles valores de  $\alpha$ , tenemos 2 tipos de soluciones, dependiendo si  $n$  es par o impar:

1)  **$n$  par**  $\Rightarrow n = 2m$

$$\varphi_2(x) = C \cos(kx + m\pi) = \pm C \cos(kx) \equiv C \cos(kx) \text{ (el sg no importa; está implícito en } C)$$

Esto corresponde a las soluciones *pares o simétricas*  $\Rightarrow \gamma = k \tan(ka)$  (3)

2)  **$n$  impar**  $\Rightarrow n = 2m + 1$

$$\varphi_2(x) = C \cos(kx + \frac{2m+1}{2}\pi) = \pm C \sin(kx) \equiv C \sin(kx)$$

Esto corresponde a soluciones *impares o antisimétricas*  $\Rightarrow \gamma = -k \cot(ka)$  (4)

• Replantando las condiciones de contorno:

1)  **$n$  par:**

$$\left. \begin{aligned} A_1 e^{-\gamma a} &= C \cos(-ka) = C \cos(ka) \\ A_1 \gamma e^{-\gamma a} &= -k C \sin(-ka) = k C \sin(ka) \\ B_3 e^{-\gamma a} &= C \cos(ka) \\ B_3 \gamma e^{-\gamma a} &= -k C \sin(ka) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_1 &= B_3 \\ C &= A_1 \frac{\gamma e^{-\gamma a}}{k \sin(ka)} \end{aligned}$$

2)  **$n$  impar:**

$$\left. \begin{aligned} A_1 e^{-\gamma a} &= C \sin(-ka) = -C \sin(ka) \\ A_1 \gamma e^{-\gamma a} &= k C \cos(-ka) = k C \cos(ka) \\ B_3 e^{-\gamma a} &= C \sin(ka) \\ B_3 \gamma e^{-\gamma a} &= -k C \cos(ka) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_1 &= -B_3 \\ C &= A_1 \frac{\gamma e^{-\gamma a}}{k \cos(ka)} \end{aligned}$$

Noten que todas las constantes quedan en función de  $A_1$ , Esta se encuentra con la condición de normalización.

• Todavía falta encontrar las energías. Las condiciones (3) y (4) nos van a dar las energías permitidas.

Como son ecuaciones trascendentes, vamos a arreglarlas un poco:

1) Para las *funciones pares*:

$$\gamma = \tan(ka)$$

$$\gamma^2 = k^2 \tan^2(ka) \Rightarrow -\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2m(V_o + E)}{\hbar^2} \tan^2(ka)$$

$$\text{Como } \gamma^2 = \frac{2mV_o}{\hbar^2} - k^2 = k^2 \tan^2(ka) \Rightarrow \frac{2mV_o}{\hbar^2} = k^2 (1 + \tan^2(ka)) = \frac{k^2}{\cos^2(ka)}$$

$$\Rightarrow \cos^2(ka) = \frac{\hbar^2}{(2mV_o)} k^2 \frac{a^2}{a^2} \text{ (multiplico y divido por } a^2 \text{ para que quede todo en función de } ka)$$

$$\Rightarrow \cos^2(ka) = \frac{\hbar^2}{(2mV_o a^2)} (ka)^2$$

Sacando la raíz:

$$\cos(ka) = \pm \left( \frac{\hbar^2}{2mV_0 a^2} \right)^{\frac{1}{2}} (ka) \Rightarrow \boxed{|\cos(ka)| = \left( \frac{\hbar^2}{2mV_0 a^2} \right)^{\frac{1}{2}} (ka)}$$

Hay que considerar algo más. Como  $\gamma = \text{tg}(ka)$  y consideramos que  $k > 0$  y  $\gamma > 0$ , entonces:

$$\text{tg}(ka) > 0 \Rightarrow \boxed{(ka) \in 1^{\text{er}} \text{ y } 3^{\text{er}} \text{ cuadrante}}$$

2) Para las *funciones impares*:

$$\gamma = -k \text{ctg}(ka)$$

Se los dejo como ejercicio. La condición resulta:

$$\boxed{|\text{sen}(ka)| = \left( \frac{\hbar^2}{2mV_0 a^2} \right)^{\frac{1}{2}} (ka)}$$

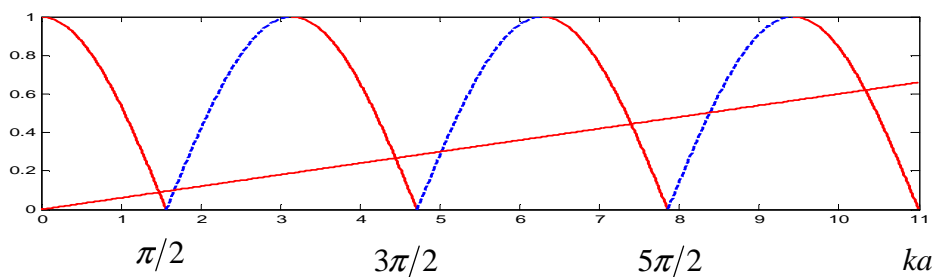
Pero ahora

$$\text{tg}(ka) < 0 \Rightarrow \boxed{(ka) \in 2^{\text{do}} \text{ y } 4^{\text{to}} \text{ cuadrante}}$$

• Resumiendo:

1) *Pares o simétricas*:

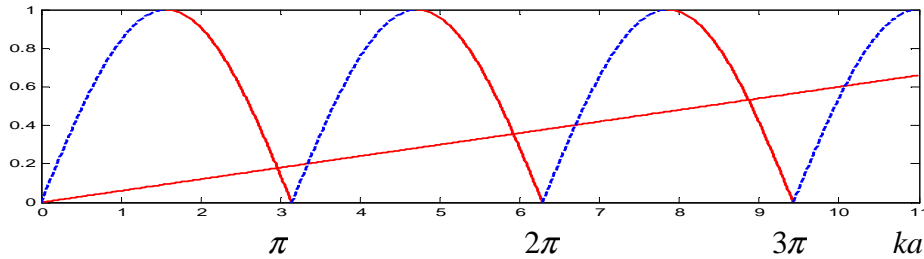
$$\boxed{\begin{aligned} |\cos(ka)| &= \left( \frac{\hbar^2}{2mV_0 a^2} \right)^{\frac{1}{2}} (ka) \\ (ka) &\in 1^{\text{er}} \text{ y } 3^{\text{er}} \text{ cuadrante} \end{aligned}}$$



2) Impares o antisimétricas:

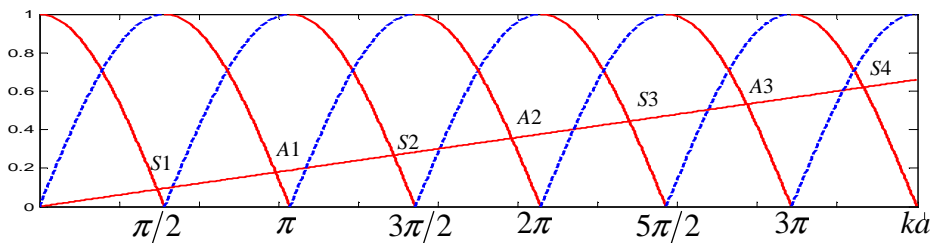
$$|\text{sen}(ka)| = \left( \frac{\hbar^2}{2mV_o a^2} \right)^{\frac{1}{2}} (ka)$$

$(ka) \in 2^{\text{do}}$  y  $4^{\text{to}}$  cuadrante



Los puntos de intersección entre la recta (roja) y las líneas llenas (rojas) de las figuras marcan los valores de  $(ka)$  que son solución de las ecuaciones trascendentes, mientras que las líneas punteadas muestran donde no hay soluciones.

*Para visualizar mejor las soluciones, grafiquemos ambos conjuntos en un único gráfico:*



- Podemos notar que, cuanto más profundo es el pozo (mayor  $V_o$ ), la pendiente de la recta es menor y se tienen más estados ligados. En particular, si  $V_o \rightarrow \infty$ , tengo infinitos estados ligados; si  $V_o \rightarrow 0$ , tengo un único estado ligado, simétrico. Se obtienen niveles de energía discretos.
- Las energías tienen expresión analítica en el caso que  $V_o \rightarrow \infty$  (pozo infinito – recordar que “infinito” en física, significa muy grande respecto de otras dimensiones). En ese caso:

$$ka = n \frac{\pi}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (V_o + E)$$

$$\Rightarrow E_n = -V_o + \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

- Observemos que, contrariamente a lo que sucede clásicamente, la mínima energía (tanto para el pozo finito como para el infinito) no es  $-V_o$ . Esto es una consecuencia del principio de incerteza, ya que la

mínima energía tiene que ser compatible con la mínima incerteza entre la posición de la partícula y su impulso (y esta, no es cero). Calculemos cuali-cuantitativamente esa energía mínima, teniendo en cuenta el principio de incerteza, en el caso del pozo infinito:

Si  $\Delta x \Delta p \approx h/2$  (un valor mayor o igual a  $\hbar/2$ ) y  $\Delta x \approx 2a$  (ancho del pozo)

Entonces:  $\Delta p \approx h/4a$

La mínima incerteza que vamos a tener en la energía cinética será:

$$\Delta T = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{h^2}{2m(4a)^2} = \frac{(2\pi\hbar)^2}{8m4a^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$$

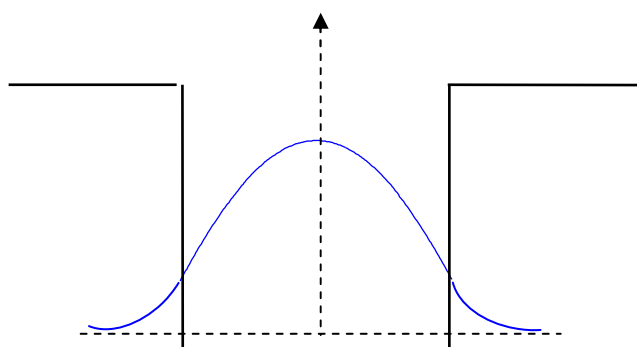
esto es justamente el  $\Delta E$  por sobre  $-V_0$  en el primer nivel

del pozo infinito. Más allá del valor cuantitativo (que obtenemos por haber asignado una incerteza igual a  $h/2$ ), lo que esto muestra es que, por el principio de incerteza, la partícula nunca puede tener una energía igual al mínimo de energía potencial.

- Veamos qué pinta tienen las autofunciones. Del gráfico se observa que las soluciones simétricas y antisimétricas se van alternando, empezando por una simétrica. Grafiquemos las tres primeras *densidades de probabilidad* (no las funciones de onda). Superponemos el gráfico de la densidad de probabilidad con el pozo de potencial, para que se vea por dónde se extiende la función.

- $n = 1$ : función simétrica 1 (S1)

$$\varphi_{S1}(x) \propto \begin{cases} e^{\gamma_1 x} & x \leq -a \\ \cos(k_1 x) & -a \leq x \leq a \\ e^{-\gamma_1 x} & x \geq a \end{cases} \Rightarrow |\varphi_{S1}(x)|^2 \propto \begin{cases} e^{2\gamma_1 x} & x \leq -a \\ \cos^2(k_1 x) & -a \leq x \leq a \\ e^{-2\gamma_1 x} & x \geq a \end{cases}$$

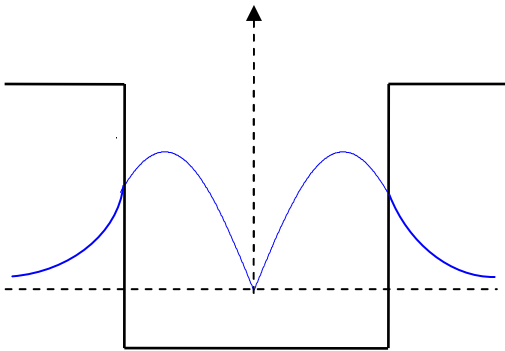


$$\text{Como } k_1 a \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_1} a \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 \geq 4a}$$

El cos no tiene ningún nodo en la zona del pozo.  
Fuera del pozo, empalma con las exponenciales.

- $n = 2$ : función antisimétrica 1 (A1)

$$\varphi_{A1}(x) \propto \begin{cases} e^{\gamma_2 x} & x \leq -a \\ \text{sen}(k_2 x) & -a \leq x \leq a \\ e^{-\gamma_2 x} & x \geq a \end{cases} \Rightarrow |\varphi_{A1}(x)|^2 \propto \begin{cases} e^{2\gamma_2 x} & x \leq -a \\ \text{sen}^2(k_2 x) & -a \leq x \leq a \\ e^{-2\gamma_2 x} & x \geq a \end{cases}$$



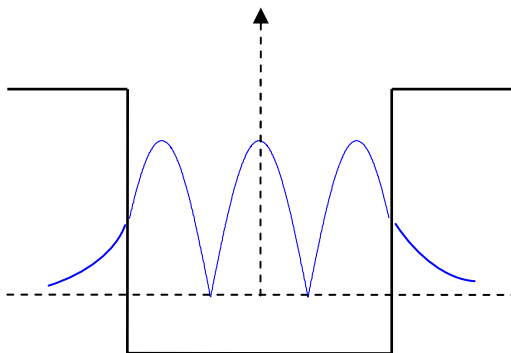
$$\frac{\pi}{2} \leq k_2 a \leq \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{\lambda_2} a \leq \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{2a \leq \lambda_2 \leq 4a}$$

Tiene un único nodo en la zona del pozo. Fuera del pozo empalma con las exponenciales.

- $n = 3$ : función simétrica 2 ( $S2$ )

$$\varphi_{S2}(x) \propto \begin{cases} e^{\gamma_3 x} & x \leq -a \\ \cos(k_3 x) & -a \leq x \leq a \\ e^{-\gamma_3 x} & x \geq a \end{cases} \Rightarrow |\varphi_{S2}(x)|^2 \propto \begin{cases} e^{2\gamma_3 x} & x \leq -a \\ \cos^2(k_3 x) & -a \leq x \leq a \\ e^{-2\gamma_3 x} & x \geq a \end{cases}$$



$$\pi \leq k_3 a \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \pi \leq \frac{2\pi}{\lambda_3} a \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{2}{3}a \leq \lambda_3 \leq a} \text{ o bien: } 1 \leq \frac{2a}{\lambda_3} \leq \frac{3}{2}$$

Es decir que entran entre 1 y  $\frac{3}{2}$  de longitudes de onda dentro del pozo. Presenta dos nodos y fuera del pozo, empalma con las exponenciales.

- Noten que los sg = (en los  $\leq$ ) corresponden al pozo infinito.
- A medida que se van sucediendo las densidades de probabilidad (o las autofunciones), va aumentando el número de nodos.
- Según se ve, en estas densidades de probabilidad hay una probabilidad no nula de detectar a la partícula en la zona clásicamente prohibida. Esto no es un problema, porque se puede ver que, si detecto a la partícula en esa región, no violo el principio de conservación de la energía (ni tengo energías cinéticas negativas, ni impulsos complejos!). Esto es un resultado que proviene del principio de incerteza. Puedo pensarlo así:

Fuera del pozo, la función es del tipo  $e^{-\gamma|x|}$ . Si yo efectúo una medición que detecta a la partícula en la zona clásicamente prohibida, esa medición seguramente tiene que tener un error  $\Delta x$  menor que el ancho



de la cola exponencial, para poder asegurar que realmente la detecté en esa zona. Ahora, el ancho de la cola exponenciales  $\approx \frac{1}{\gamma}$ , esencialmente. Por la relación de incerteza:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \Rightarrow \Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \hbar \gamma$$

Con esa dispersión, la incerteza que tengo en la energía cinética es:

$$\Delta T = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m} \quad \text{y como } \gamma^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \Delta T \geq |E|$$

O sea que tengo una incerteza en la energía cinética que es mayor que la propia energía de la partícula. Tengo suficiente certeza de haberla detectado en esa zona, pero pierdo certeza sobre la energía de la partícula.

- **Paridad**

Aprovechemos la simetría del potencial para introducir un concepto importante en mecánica cuántica, que es el concepto de *paridad de la función de onda*.

- La densidad de probabilidad es simétrica con la misma simetría que tiene el potencial. Eso está bien y es general: siempre la densidad de probabilidad va a reflejar la simetría del potencial, ya que intervalos simétricos no pueden ser diferentes (no hay ninguna razón física para privilegiar uno frente al otro).
- Sin embargo, las autofunciones son simétricas o antisimétricas respecto de la simetría del potencial. Eso también es general y se puede demostrar. Supongamos que tenemos un potencial que es simétrico, por ejemplo, respecto del eje que pasa por  $x=0$  (como es este caso). Planteamos la ecuación de Schrödinger:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \varphi(x) = E \varphi(x)$$

donde  $V(x) = V(-x)$

Hagamos el cambio de variables  $x' = -x$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx'^2} + V(x') \right] \varphi(x') = E \varphi(x')$$

El término del operador energía cinética no cambia pues es una derivada segunda; tampoco cambia el potencial. Por lo tanto, el operador  $\hat{H}(x')$  es el mismo de antes, y sus autofunciones solo pueden diferir de las de  $\hat{H}(x)$  en una constante multiplicativa:

$$\varphi(x') = C \varphi(x) \Rightarrow \varphi(-x) = C \varphi(x)$$

Si vuelvo a reemplazar  $x \rightarrow -x$ :

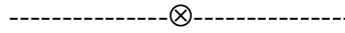
$$\varphi(x) = C \varphi(-x) = C^2 \varphi(x) \Rightarrow C = \pm 1$$

Es decir:

$$\boxed{\varphi(-x) = \pm\varphi(x)}$$
 (y eso está bien, para que la densidad sea simétrica)

Esta propiedad de simetría se llama *paridad*. A las funciones simétricas o pares se les asigna paridad +1, y a las antisimétricas o impares, paridad -1.

En muchos casos en física atómica o nuclear, en que se trabaja con estados ligados, el potencial es simétrico y, por lo tanto, las autofunciones tienen paridad bien definida. En física nuclear, por ejemplo, la paridad juega un papel muy importante ya que en casi todos los procesos de decaimiento nuclear, la paridad se conserva.



Creían que habíamos terminado? Todavía nos falta averiguar qué pasa si la energía de la partícula es:

- $E > 0$

En ese caso:

$$1) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_1(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E \varphi_1(x) = 0$$

$$2) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_2(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (V_o + E) \varphi_2(x) = 0$$

$$3) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_3(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E \varphi_3(x) = 0$$

Las ecuaciones son las mismas, pero ahora la energía es positiva. Entonces definimos:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_o + E) > 0 \quad \gamma^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E > 0$$

Con lo que:

$$1) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_1(x) + \gamma^2 \varphi_1(x) = 0$$

$$2) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_2(x) + k^2 \varphi_2(x) = 0$$

$$3) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_3(x) + \gamma^2 \varphi_3(x) = 0$$

Es decir, en todas las regiones tenemos ondas viajeras:

$$\varphi_1(x) = A_1 e^{i\gamma x} + B_1 e^{-i\gamma x}$$

$$\varphi_2(x) = A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx}$$

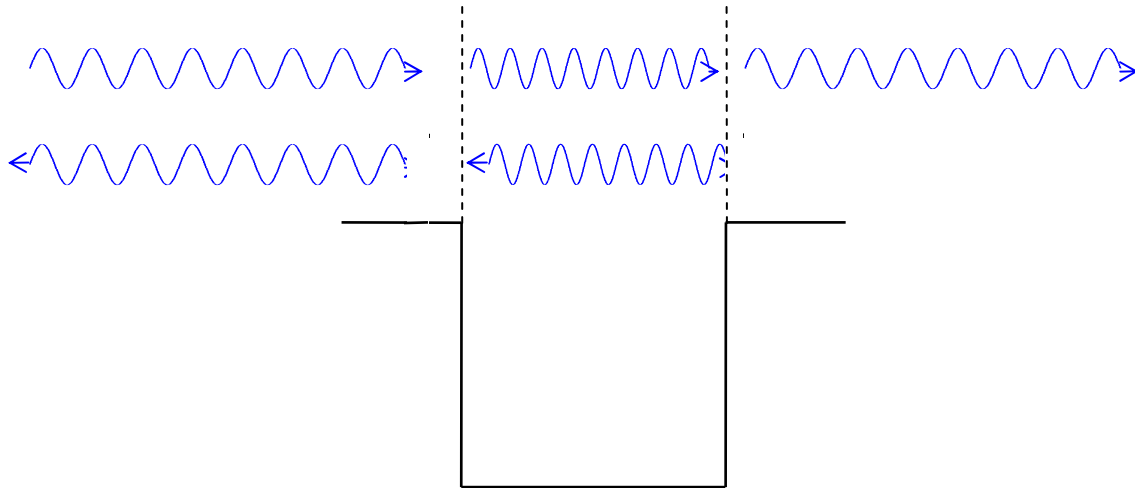
$$\varphi_3(x) = A_3 e^{i\gamma x} + B_3 e^{-i\gamma x}$$

donde:

$$\varphi_1(x) = \underbrace{A_1 e^{i\gamma x}}_{\substack{\text{onda incidente desde } -\infty \\ \rightarrow}} + \underbrace{B_1 e^{-i\gamma x}}_{\substack{\text{onda reflejada} \\ \leftarrow}} \text{ en la región 1}$$

$$\varphi_3(x) = \underbrace{A_3 e^{i\gamma x}}_{\substack{\text{onda transmitida} \\ \rightarrow}} + \underbrace{B_3 e^{-i\gamma x}}_{\substack{\text{onda incidente desde } +\infty \\ \leftarrow}} \quad \text{en la región 3}$$

La matemática nos da todas las soluciones. Podemos pensar que hay una onda incidente desde  $-\infty$  que, en parte, se refleja, y en parte, se transmite. La función  $B_3 e^{-i\gamma x}$  representa una onda que viene desde  $+\infty$ , es decir puede representar una partícula (o flujo de partículas) que viene desde  $+\infty$ . Si imponemos como condición inicial que las partículas provienen solo de  $-\infty$ , podemos anular esa onda, haciendo  $B_3 = 0$  (como se ve en la figura).



- Aquí tenemos otro fenómeno puramente cuántico: la partícula tiene probabilidad no nula de reflejarse (es decir, volver sobre hacia  $-\infty$ ). Si consideramos un flujo de partículas, este se va a dividir de acuerdo a sus probabilidades: parte se va a transmitir y parte se va a reflejar (vamos a estudiar ese fenómeno en detalle en la próxima clase). Esto es un fenómeno netamente ondulatorio, similar a lo que le sucede a una onda que se encuentra con un contorno.
- Observen la relación entre las longitudes de onda de las ondas viajeras dentro y fuera el pozo. Por qué y cómo cambian?
- Tenemos, entonces, 5 constantes de integración a determinar, más la energía, y solo 4 condiciones de contorno (en este caso, no tenemos la condición de normalización). Si resolvemos el sistema de ecuaciones, el determinante siempre se puede anular jugando con la constante extra. Entonces, vemos que no hay ninguna condición sobre la energía. Por lo tanto, para todo valor de  $E > 0$  tenemos solución de la ecuación de Schrödinger. O sea, la partícula tiene un espectro continuo de energías. Eso es general. Los estados no ligados, como estos, tienen un espectro continuo.
- *Nota:* Las ondas viajeras no están normalizadas, así que, en principio, no son una buena función de onda. Sin embargo, como la ecuación de Schrödinger es lineal, vale el principio de superposición y, por lo tanto, cualquier combinación lineal de ondas planas y satisfaciendo  $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ , también va a ser solución.

En particular, un paquete de ondas. Por lo tanto, podemos pensar a esta solución como una aproximación que nos muestra cómo se comporta cada componente de un paquete de ondas y, por lo tanto, el mismo paquete.