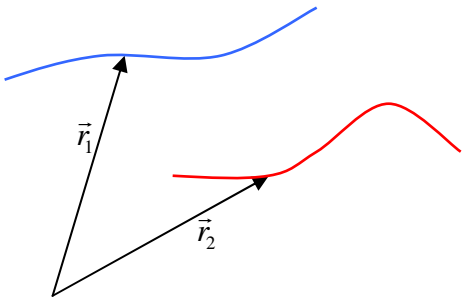


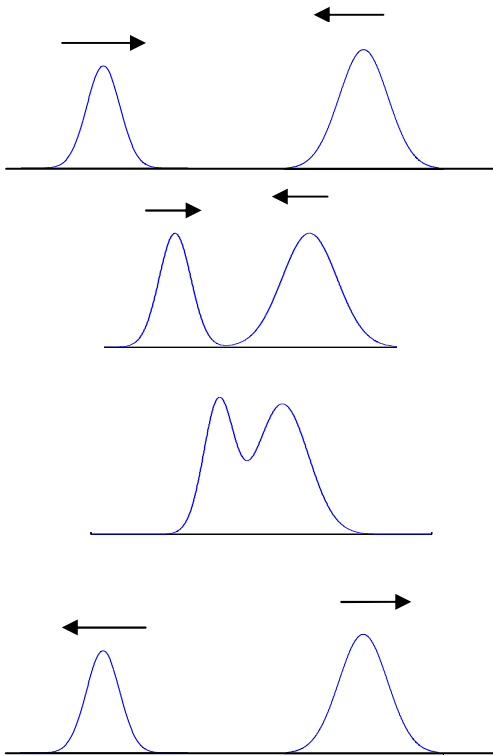
Clase 29: Partículas idénticas.

Dos partículas son idénticas si todas sus propiedades intrínsecas ($q, m, s, etc.$) son exactamente las mismas. Por ejemplo, todos los e^- del universo, todos los átomos de H, todos los p^+ , etc. Esto significa que no existe un experimento que pueda distinguir una de otra. La *consecuencia* de esto es que si un sistema físico contiene dos partículas idénticas, no cambian sus propiedades ni su posterior evolución si intercambiamos los roles de ambas partículas.

- *Clásicamente*: no hay problema.



Cada partícula se mueve a lo largo de una trayectoria bien definida, que nos permite distinguirla de las otras en cada instante, y seguir su evolución individual. La numeración que le imponemos es arbitraria, pero se las trata como si fueran de diferente naturaleza. Todas las constantes de movimiento son invariantes frente a un intercambio de ambas partículas.

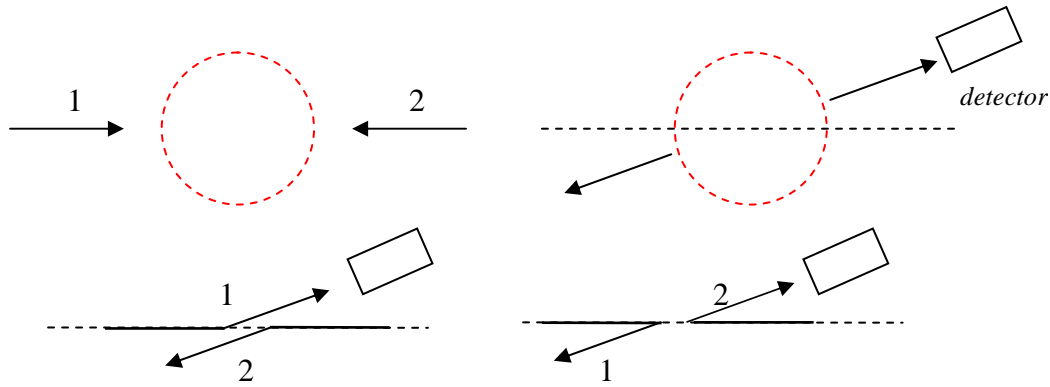


- *Cuánticamente*: la situación es totalmente diferente, ya que las partículas no tienen una trayectoria definida. Por ejemplo, si a $t = 0$, los paquetes de onda de dos partículas idénticas están completamente separados en el espacio, la evolución posterior puede mezclarlos. Esto hace que perdamos rastro de las partículas. Es decir, si detectamos una partícula en una región del espacio en la que las dos tienen probabilidad no nula de estar, no tenemos forma de saber a cuál de las dos detectamos. Por ejemplo, supongamos un choque entre dos partículas idénticas, en el sistema CM. Antes de choque, tenemos dos paquetes de onda totalmente separados, que se dirigen el uno hacia el otro. Incluso, podemos numerarlos artificialmente. Durante el choque, ambos paquetes se superponen espacialmente. Después del choque, al separarse los paquetes, no sabemos si ambos siguieron con el mismo

sentido de que tenían antes del choque, o si volvieron sobre sus pasos. Dos posibilidades, dos estados finales posibles y no podemos determinar cuál es el estado final.

- También podríamos haber tenido la siguiente situación. En una interacción entre las dos partículas, la región del espacio donde tenemos probabilidad no nula de detectar a las dos partículas se parece a una esfera cuyo radio aumenta con el tiempo. Supongamos que ponemos un detector a un cierto ángulo y detectamos a una partícula. Es cierto, ya que el impulso lineal se conserva, que la otra partícula se mueve en dirección opuesta. Sin embargo, es imposible saber si detectamos a la partícula que inicialmente

llamamos 1, o a la 2 \Rightarrow hay dos caminos diferentes que conducen a la misma situación final que detectamos:



Esto trae aparejada una dificultad adicional para calcular la probabilidad de una determinada medición, ya que necesitamos conocer el estado final del sistema y no podemos distinguir entre uno y otro. Cómo calculamos la probabilidad, tomando la suma de las probabilidades o la suma de las amplitudes de las probabilidades?:

$$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \text{ o } |\psi_1 + \psi_2|^2 ?$$

Vamos a contestar a esto físicamente, es decir, viendo qué consecuencias físicas tiene sobre el estado del sistema el hecho de que las partículas no se puedan distinguir.

- Empecemos considerando un sistema de dos partículas, representado por un hamiltoniano $\hat{H}(1,2)$, donde los números 1 y 2 representan a las coordenadas de las partículas 1 y 2 (es una forma más corta de escribir). Si las partículas son idénticas:

$$\hat{H}(1,2) = \hat{H}(2,1)$$

es decir, el hamiltoniano es *invariante frente al intercambio de las partículas*. Esto es una simetría y, por lo tanto, la vamos a tratar como hemos tratado todas las simetrías hasta ahora.

- Definamos un *operador de permutación* $\hat{P}(1,2)$ que lo que hace es intercambiar la partícula 1 con la 2, y viceversa, es decir:

$$\hat{P}(1,2)f(1,2) = f(2,1)$$

Vamos a ver que $\hat{H}(1,2)$ y $\hat{P}(1,2)$ conmutan:

$$\hat{P}(1,2)\hat{H}(1,2)\psi(1,2) = \hat{H}(2,1)\psi(2,1) = \hat{H}(1,2)\psi(2,1)$$

$$\hat{H}(1,2)\hat{P}(1,2)\psi(1,2) = \hat{H}(1,2)\psi(2,1)$$

$\Rightarrow [\hat{P}, \hat{H}] = 0 \Rightarrow$ tienen autofunciones comunes. Como siempre, el hamiltoniano que tiene una simetría conmuta con el operador que realiza esa operación de simetría.

- Veamos las características de las autofunciones de $\hat{P}(1,2)$ para sacar conclusiones sobre las autofunciones de $\hat{H}(1,2)$:

$\hat{P}(1,2)\psi(1,2) = \lambda\psi(1,2) = \psi(2,1) \Rightarrow \psi(2,1)$ es también autofunción de $\hat{P}(1,2)$, ya que difiere de $\psi(1,2)$ en una constante.

- Veamos qué relación hay entre $\psi(1,2)$ y $\psi(2,1)$, es decir, veamos quién es λ . Notemos que:

$$\hat{P}^2(1,2) = \hat{1}$$

En efecto:

$$\hat{P}(1,2)\hat{P}(1,2)\psi(1,2) = \hat{P}(1,2)\psi(2,1) = \psi(1,2) = \lambda^2\psi(1,2)$$

$$\Rightarrow \psi(1,2) \text{ es autofunción de } \hat{P}^2(1,2) \text{ con autovalor } 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \sqrt{1} = \pm 1}$$

- Esto conduce a varias conclusiones importantes!

1) $\psi(2,1) = \pm\psi(1,2) \Rightarrow \psi(1,2)$ debe ser una función simétrica o antisimétrica frente al intercambio de las partículas.

$$\left. \begin{aligned} 2) \hat{H}(1,2)\psi(1,2) &= E(1,2)\psi(1,2) \\ \Rightarrow \hat{H}(1,2)\psi(2,1) &= E(1,2)\psi(2,1) \end{aligned} \right\} \psi(1,2) \text{ y } \psi(2,1) \text{ están degeneradas. Esta degeneración se llama}$$

degeneración de intercambio.

Noten que este resultado es lo que vimos en el ejemplo del choque. Los dos estados finales posibles son equivalentes (es decir, están degenerados) y corresponden a haber intercambiado el rol de cada partícula. Esto, además está de acuerdo con que la densidad de probabilidad del sistema conjunto no puede cambiar si se intercambian las dos partículas.

Si se tiene un sistema de N partículas, este resultado se generaliza fácilmente (lo hacemos más adelante).

- Por ejemplo, supongamos dos partículas independientes. $\hat{H}(1,2)$ es:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 + V_1(1) + V_2(2) \right] \psi(1,2) = E(1,2)\psi(1,2)$$

$$\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 + V_1(1) \right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 + V_2(2) \right) \right] \psi(1,2) = E(1,2)\psi(1,2)$$

Los problemas son separables. Luego, como hemos visto:

$$\psi(1,2) = \psi_\mu(1)\psi_\nu(2) \equiv \psi_{\mu\nu} \quad (1)$$

donde $\psi_\mu(1)$ y $\psi_\nu(2)$ son las soluciones de los problemas separables, y μ y ν representan todos los números cuánticos que les corresponden. En el último miembro escribimos este producto en forma resumida, donde el primer índice de números cuánticos (μ) corresponde a la partícula 1, y el segundo (ν), a la partícula 2.

Esto está bien??!! NO!!

$\psi(1,2)$ tiene que ser simétrica o antisimétrica frente al intercambio de las dos partículas, así que el simple producto (1) no es una función de onda aceptable para el sistema de las dos partículas. Cómo sería, entonces, una buena función de onda?

- Como $\psi(1,2)$ y $\psi(2,1)$ están degeneradas, cualquier combinación lineal es autofunción. Entonces hay que buscar combinaciones lineales que sean simétricas o antisimétricas:

$$\psi_S(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\mu(1)\psi_\nu(2) + \psi_\nu(1)\psi_\mu(2)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\mu\nu} + \psi_{\nu\mu}]$$

$$\psi_A(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\mu(1)\psi_\nu(2) - \psi_\nu(1)\psi_\mu(2)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\mu\nu} - \psi_{\nu\mu}]$$

Noten que, si intercambiamos los índices 1 y 2 de las partículas, $\psi_S(1,2) = \psi_S(2,1)$, y $\psi_A(1,2) = -\psi_A(2,1)$

- La densidad de probabilidad será (con la notación resumida):

$$\psi_S^* \psi_S = \frac{1}{2} [\psi_{\mu\nu}^* \psi_{\mu\nu} + \psi_{\nu\mu}^* \psi_{\nu\mu}] + \frac{1}{2} [\psi_{\nu\mu}^* \psi_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}^* \psi_{\nu\mu}]$$

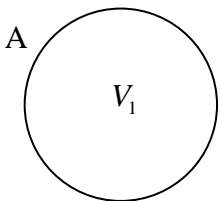
$$\psi_A^* \psi_A = \frac{1}{2} [\psi_{\mu\nu}^* \psi_{\mu\nu} + \psi_{\nu\mu}^* \psi_{\nu\mu}] - \frac{1}{2} [\psi_{\nu\mu}^* \psi_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}^* \psi_{\nu\mu}]$$

$$\left| \psi_A^S \right|^2 = \frac{1}{2} [|\psi_{\mu\nu}|^2 + |\psi_{\nu\mu}|^2] \mp \frac{1}{2} [\psi_{\nu\mu}^* \psi_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}^* \psi_{\nu\mu}]$$

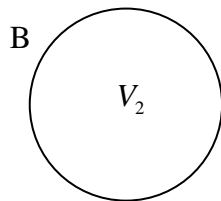
⇒ Los términos del primer corchete son la suma de las densidades de probabilidad de los dos posibles estados finales (cf. con el ejemplo del choque).

⇒ A esto se agregan los términos del segundo corchete que mezclan ambos estados. Estos son términos de *interferencia*, que aparecen debido a la *indistinguibilidad* de las partículas.

- Noten que, en el límite clásico, cuando los paquetes están muy separados, localizados en alguna zona del espacio:



$\psi_\mu(1)$ ó $\psi_\mu(2)$



$\psi_\nu(1)$ ó $\psi_\nu(2)$

En la zona A actúa V_1 , así que o $\psi_\mu(1)$ ó $\psi_\mu(2)$ son $\neq 0$; pero $\psi_\nu = 0$. En B actúa V_2 , así que $\psi_\nu(1)$ ó $\psi_\nu(2)$ son $\neq 0$. Por lo tanto, en los términos cruzados, si $\psi_{\mu\nu} \neq 0$, entonces $\psi_{\nu\mu} = 0$ por lo que los términos de interferencia se anulan. Entonces, en este caso, la densidad de probabilidad es análoga al caso clásico de dos partículas

indistinguibles, una en estado ψ_μ y otra en estado ψ_ν (es decir, cuando no se especifica cuál está en cada estado).

- Notemos, asimismo, que si un estado es simétrico o antisimétrico, no pierde ese carácter con el tiempo. Consideremos la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para ver la evolución del estado:

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow \psi(t+dt) \equiv \psi(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = \psi(t) + dt \underbrace{\frac{\hat{H}}{i\hbar}}_{\text{simétrico}} \psi(t) = \left(\hat{1} + dt \frac{\hat{H}}{i\hbar} \right) \psi(t)$$

\Rightarrow como el operador que aplica sobre $\psi(t)$ es simétrico, entonces $\psi(t+dt)$ va a tener las mismas características de $\psi(t)$: si $\psi(t)$ es simétrica (antisimétrica), $\psi(t+dt)$ también es simétrica (antisimétrica).

- **Bosones y fermiones**

Que la función de onda de un sistema de partículas idénticas sea simétrica o antisimétrica divide a todas las partículas del universo en dos categorías:

\Rightarrow *fermiones*, con función de onda antisimétrica;

\Rightarrow *bosones*, con función de onda simétrica.

Todas las partículas conocidas entran dentro de alguna de estas dos categorías, y obedecen esta regla empírica (para nosotros, empírica; en teoría de campos se demuestra):

\Rightarrow partículas con *spin semientero son fermiones* (e^- , p^+ , n^0 , e^+ (*positrones*), μ (*muones*), etc)

\Rightarrow partículas con *spin entero son bosones* ($h\nu$, α^{2+} , *mesones*, etc).

- Para partículas compuestas (como las partículas alfa, α^{2+}) rige la misma regla. Para ver si la función de onda de dos partículas compuestas es simétrica o antisimétrica, es decir, se permutan las dos partículas. Permutarlas significa permutar simultáneamente todas las partículas elementales de 1 con las de 2. Esta permutación deja inalterada la función de onda si las partículas compuestas están formadas por bosones o un número par de fermiones. En ese caso, la partícula compuesta es un bosón. Si las partículas compuestas contienen un número impar de fermiones, entonces van a ser fermiones.

Por ejemplo, sea la función de onda de dos partículas compuestas A y B , donde $A, B = (f_1, f_2)$ están formadas por dos fermiones. Entonces:

$$\begin{aligned} \psi(A, B) &= \psi(f_1^A, f_2^A; f_1^B, f_2^B) \\ &= -\psi(f_1^B, f_2^A; f_1^A, f_2^B) \quad \text{se intercambia el fermión } f_1^A \text{ con el } f_1^B: \text{ sale un signo negativo.} \\ &= \psi(f_1^B, f_2^B; f_1^A, f_2^A) \quad \text{se intercambia el fermión } f_2^A \text{ con el } f_2^B: \text{ sale otro signo negativo.} \\ &= \psi(B, A) \quad \text{la función de onda resulta simétrica: las partículas compuestas son } \textit{bosones}. \end{aligned}$$

Por supuesto, esto también puede determinarse viendo si el spin de las partículas compuestas es entero (bosones) o semientero (fermiones).

- Sigamos con las partículas independientes. En el caso de dos fermiones, vimos que la función de onda antisimétrica se escribe:

$$\psi_A(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\mu(1)\psi_\nu(2) - \psi_\nu(1)\psi_\mu(2)]$$

Notemos que esta función se puede escribir de una forma más compacta como un *determinante*:

$$\psi_A(1,2) = \frac{\det \begin{bmatrix} \psi_\mu(1) & \psi_\mu(2) \\ \psi_\nu(1) & \psi_\nu(2) \end{bmatrix}}{\sqrt{2}}$$

Para dos bosones:

$$\psi_s(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\mu(1)\psi_\nu(2) + \psi_\nu(1)\psi_\mu(2)]$$

La función puede escribirse como un permanente (es como el determinante, pero todos los productos se suman):

$$\psi_s(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \psi_\mu(1) & \psi_\mu(2) \\ \psi_\nu(1) & \psi_\nu(2) \end{bmatrix}_+$$

- Esto se generaliza para N partículas: tengo combinaciones lineales simétricas o antisimétricas de N funciones:

$$\psi_1(1)\psi_2(2)\psi_3(3)\dots\psi_N(N) \quad (\text{esto se llama un } \textit{producto de Hartree})$$

y tengo que sumar (o restar, según corresponda) todos los productos en los que he intercambiado dos partículas. Para bosones, todos los productos se suman, pero para fermiones, tengo que ver cuántos cambios tuve que hacer para intercambiar dos partículas, para ver si sumo o resto el producto de funciones: un garrón. Cuántos de estos productos de funciones tengo? Tantos como el número de permutaciones, o sea $N!$ Por suerte, esto es equivalente a hacer el determinante (el determinante es la función antisimétrica por excelencia) para fermiones, o el permanente para bosones:

$$\psi_{A(S)} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{bmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(N) \\ \psi_2(1) & \psi_2(2) & \dots & \psi_2(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_N(1) & \psi_N(2) & \dots & \psi_N(N) \end{bmatrix} \begin{matrix} - \rightarrow \textit{fermiones} \\ + \rightarrow \textit{bosones} \end{matrix}$$

En el caso de los fermiones, esta función de onda se denomina *determinante de Slater*. En la mayoría de los cálculos cuánticos de moléculas, se parte de un cálculo de partícula independiente en el campo promediado de las otras partículas. Es decir, se calcula el determinante de Slater como función de onda de partida y luego se agrega la correlación entre las partículas por diversos métodos.

- Veamos una consecuencia muy importante, que muestra el diferente comportamiento de fermiones y bosones. Supongamos que, de las N partículas, hay dos en el mismo estado de partícula. Esto significa, por ejemplo, que $\psi_1 = \psi_2$. Entonces:

$$\psi_{A(S)} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{bmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(N) \\ \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_N(1) & \psi_N(2) & \dots & \psi_N(N) \end{bmatrix} \begin{matrix} - \rightarrow \textit{fermiones} \\ + \rightarrow \textit{bosones} \end{matrix}$$

Un determinante con dos filas (o columnas) iguales es nulo, mientras que el permanente puede tener todas sus filas (o columnas) iguales sin anularse. Qué significa esto?

\Rightarrow *dos fermiones no pueden ocupar simultáneamente el mismo estado* (la función de onda es idénticamente nulo). Esto es lo que se conoce como *principio de exclusión de Pauli*, que se cumple, por ejemplo, en los átomos o moléculas, donde no puede haber dos e^- en el mismo estado.

\Rightarrow por el contrario, *los bosones no tienen restricciones, incluso todos los bosones pueden estar simultáneamente en el mismo estado*. Como vamos a ver en la próxima clase, esto es lo que se llama un *condensado de Bose-Einstein*.

- Supongamos ahora un sistema de *dos fermiones idénticos interactuantes*, cuyo hamiltoniano no depende de \vec{S} (por ejemplo, no hay acoplamiento $\vec{L} \cdot \vec{S}$). Los estados se escriben teniendo en cuenta también la función de onda de spin, que se factoriza de la parte espacial de la función de onda:

$$\psi(1,2) = \phi(1,2)\sigma(1,2)$$

donde $\phi(1,2)$ es la parte espacial de la función de onda y $\sigma(1,2)$, la parte de spin.

La función de onda total tiene que ser antisimétrica; entonces:

si $\phi_S(1,2)$ simétrica $\Rightarrow \sigma_A(1,2)$ antisimétrica

si $\phi_A(1,2)$ antisimétrica $\Rightarrow \sigma_S(1,2)$ simétrica

Qué combinaciones tenemos? Los estados de spin de los e^- pueden ser α o β :

a) Para $\phi_S(1,2) \Rightarrow \sigma_A(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)] \Rightarrow$ esto se llama un *estado singlete* (o singulete).

b) Para $\phi_A(1,2) \Rightarrow \sigma_S(1,2) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha(1)\alpha(2) \quad (1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1)] \quad (2) \\ \beta(1)\beta(2) \quad (3) \end{array} \right\} \Rightarrow$ esto se llama un *estado triplete*.

Estas cuatro funciones están degeneradas. Eso es fácil de ver. Si $\hat{H}(1,2)$ es independiente de \vec{S} , la función $\sigma(1,2)$ es transparente a $\hat{H}(1,2)$; $\phi_S(1,2)$ y $\phi_A(1,2)$ son autofunciones espaciales de $\hat{H}(1,2)$, y con la misma E (degeneración de intercambio). Entonces, tenemos 4 estados que solo se diferencian en el estado de spin. Podemos interpretarlo físicamente calculando:

$$S_z(1,2)\sigma(1,2) = [S_z(1) + S_z(2)]\sigma(1,2) = \hbar m_s \sigma(1,2)$$

donde m_s es el número cuántico para el par de partículas y $S_z(1)$ actúa sobre las funciones de la partícula 1, y $S_z(2)$, sobre las de la partícula 2.

$$\begin{aligned} 1) [S_z(1) + S_z(2)] \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)] &= \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}\alpha(1)\beta(2) - \frac{1}{2}\alpha(1)\beta(2) - \frac{1}{2}\alpha(2)\beta(1) + \frac{1}{2}\alpha(2)\beta(1) \right] = 0 \Rightarrow m_s = 0 \end{aligned}$$

$$2) [S_z(1) + S_z(2)]\alpha(1)\alpha(2) = \frac{\hbar}{2}[\alpha(1)\alpha(2) + \alpha(1)\alpha(2)] = \hbar\alpha(1)\alpha(2) \Rightarrow m_s = 1$$

$$3) [S_z(1) + S_z(2)] \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1)] =$$

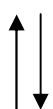
$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) - \alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1) - \alpha(2)\beta(1)] = 0 \Rightarrow m_s = 0$$

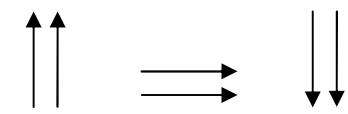
$$4) [S_z(1) + S_z(2)] \beta(1)\beta(2) = -\frac{\hbar}{2} [\beta(1)\beta(2) + \beta(1)\beta(2)] = -\hbar\beta(1)\beta(2) \Rightarrow m_s = -1$$

• Para ver a qué estados de spin corresponden estas proyecciones, podemos aplicar lo que vimos para sumar dos impulsos angulares, es decir, en este caso, el spin total del sistema de las dos partículas puede ser:

$$|s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2 \Rightarrow \boxed{0 \leq s \leq 1}$$

Entonces, el *estado singlete* corresponde a que los spines de las partículas se acoplen a $s = 0$, mientras que en el *triplete*, se acoplan a $s = 1$ (con sus tres proyecciones). Por lo tanto:

 \Rightarrow el estado singlete corresponde a que los dos spines de las partículas sean antiparalelos (\neq función de spin, ya que la función espacial es simétrica).

 \Rightarrow el estado triplete corresponde a que los dos spines de las partículas sean paralelos (la función espacial es antisimétrica, por lo tanto las dos partículas pueden tener el mismo estado de spin). Nota: * no es una representación muy realista.

$m_s = 1$ $m_s = 0$ $m_s = -1$

• Veamos una consecuencia importante del estado de spin en el que pueden estar los e^- .

Supongamos que queremos acercarnos espacialmente a los dos e^- , es decir, tal que $\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2$:

\Rightarrow Si tienen sus spines acoplados a 1, es decir, están en un estado triplete, la parte espacial de la función de onda tiene que ser antisimétrica. Entonces:

$$\phi_A(1,2) = -\phi_A(2,1)$$

$$\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2 \Rightarrow \phi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = -\phi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_1) \Rightarrow \phi_A \rightarrow 0$$

Los dos e^- no pueden acercarse espacialmente; es *como si* se repelieran, pero esto no se debe a una interacción de coulomb entre ellos sino a su *estado de spin*.

\Rightarrow Si tienen sus spines acoplados a 0, es decir, están en un estado singlete, la parte espacial de la función de onda tiene que ser simétrica. Entonces:

$$\phi_S(1,2) = \phi_S(2,1)$$

$$\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2 \Rightarrow \phi_S(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \phi_S(\vec{r}_1, \vec{r}_1) \Rightarrow \phi_S \neq 0$$

(no hay ninguna restricción – incluso puede tener un valor grande)

Los dos e^- pueden acercarse espacialmente; es *como si* se atrajeran, ya que no existen restricciones para ϕ_S . Otra vez, esto no es producto de una interacción electrostática, sino del estado de spin.

• Esto se llama *interacción de intercambio* y no tiene análogo clásico. Noten que no es una interacción que aparezca explícitamente en el hamiltoniano, sino que aparece implícitamente al considerar el spin.

Dijimos que las propiedades fundamentales se manifiestan a través de sus interacciones. Bueno, esta es una de ellas.

