

## Clase 15: Teoría de De Broglie – Paquetes de ondas – Incerteza

Hagamos un corto resumen sobre las hipótesis que tenemos hasta ahora.

- El problema de los calores específicos de los sólidos y el de la radiación espectral del cuerpo negro mostraron que los osciladores materiales tienen su energía cuantificada:

$$E = nh\nu = n\hbar\omega \quad (\text{Planck-Einstein})$$

- La radiación espectral del cuerpo negro, a su vez, mostró que los osciladores de radiación también tienen su energía cuantificada de la misma manera.
- El estudio de la interacción de la radiación con la materia (efecto fotoeléctrico, efecto Compton) revela que:

➤ Toda la materia puede absorber energía de la radiación en cantidades  $E = h\nu$

➤ La radiación electromagnética parece tener una naturaleza dual:

⇒ *corpuscular*, al interactuar con la materia: fotones o cuantos de radiación (Einstein)

⇒ *ondulatoria*, al propagarse: campo electromagnético propagándose en ondas (interferencia, difracción)

- El modelo atómico de Bohr muestra niveles de energía discretos para el  $e^-$  y estados *estacionarios*: el  $e^-$  no emite radiación en uno de esos estados (aunque clásicamente, debería hacerlo), y solo irradia (o absorbe energía) al pasar de un estado estacionario a otro.
- Las leyes físicas de conservación siguen siendo válidas.

Este cuerpo de ideas nuevas resultaba todavía “deshilvanado” e incompleto (hasta ahora, solo para sistemas periódicos y átomos con un solo  $e^-$ ). Una mezcla rara de física clásica e hipótesis *ad hoc*, por lo que resultaba un poco incoherente. Y esto fue así hasta que apareció en escena Louis de Broglie (1924).

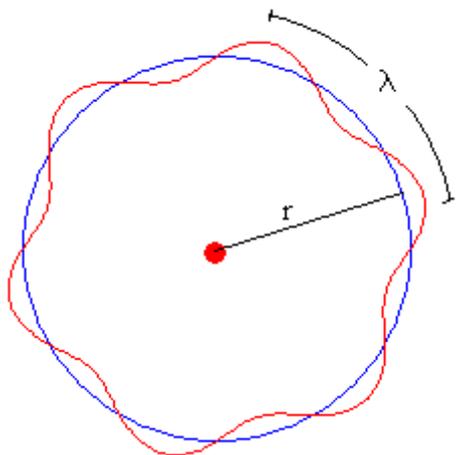
### • Teoría de Louis de Broglie – Dualidad onda-partícula

Después de la teoría de Bohr-Sommerfeld, de Broglie (a la sazón, un estudiante de doctorado) se preguntó cómo la relación de Planck-Einstein  $\Delta E = h\nu$ , junto con la existencia de niveles discretos de energía, parecía implicar que cada nivel de energía estaba relacionado con una determinada frecuencia. Y, para colmo, la inexplicable circunstancia de que un  $e^-$  en uno de estos estados estacionarios no emite. La aparición de un conjunto discreto de frecuencias permitidas era, sin embargo, un fenómeno familiar en física clásica, en conexión, por ej., con ondas estacionarias. Pero estamos hablando de partículas ( $e^-$ )...

Con estas especulaciones, en palabras de él mismo, de Broglie, tuvo “una súbita inspiración”, que fue su tesis de doctorado:

La naturaleza es simétrica: la dualidad onda-partícula de la radiación electromagnética propuesta por Einstein se extiende a toda la naturaleza física. Si la radiación a veces se comporta como ondas y a veces como partículas, entonces la materia también tiene ese carácter dual, y las reglas de cuantificación en realidad, son condiciones sobre las ondas. De Broglie, de esta manera, especuló que las partículas

materiales estaban asociadas a fenómenos ondulatorios. Veamos a qué nos conduce esta hipótesis de de Broglie:



Supongamos una onda estacionaria a lo largo de una circunferencia. Para que la onda sea estacionaria debe cumplirse:

$$2\pi r = n\lambda \quad (1)$$

Consideremos las relaciones de la dualidad onda-partícula para un fotón:

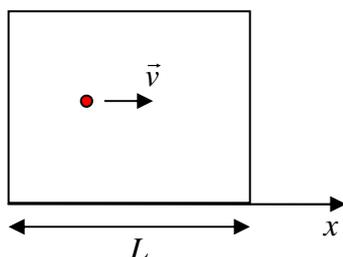
$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \quad \left(\lambda = \frac{2\pi}{k}\right)$$

Introduciendo esta relación en (1):

$$2\pi r = n \frac{h}{p} \Rightarrow \boxed{pr = L = n\hbar}$$

Ambas condiciones son equivalentes! Es decir, con esta hipótesis, por ejemplo, *el postulado de Bohr sobre la cuantificación del impulso angular es equivalente a una condición de onda estacionaria.*

La cuantificación de Bohr-Sommerfeld también conduce a relaciones para ondas estacionarias. Por ejemplo, supongamos una partícula en una caja, moviéndose hacia delante y hacia atrás (choca elásticamente con las paredes):



En un ciclo:

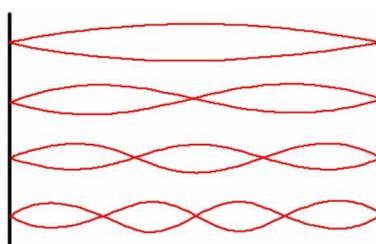
$$\oint p_x dx = \int_0^L mvd x + \int_L^0 m(-v) dx = 2mvL = nh$$

$$\Rightarrow p = \frac{nh}{2L} \quad \text{y} \quad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

La longitud de onda, entonces:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2L}{n} \Rightarrow \boxed{n \frac{\lambda}{2} = L}$$

o sea, condición de ondas estacionarias.



- El postulado de de Broglie implicaba entonces una gran unificación entre la materia y la luz. Propuso así que la relación entre el impulso lineal y la longitud de onda de un fotón, así como la relación entre la frecuencia y la energía, también eran aplicables a las partículas materiales:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{h}{p} \\ \nu = \frac{E}{h} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\lambda, \nu) \equiv \text{propiedades de onda} \\ (p, E) \equiv \text{propiedades de partícula} \end{array}$$

Estas ondas asociadas a las partículas no eran electromagnéticas. Pero, entonces, qué eran? De Broglie especuló que las partículas materiales estaban asociadas con fenómenos ondulatorios “ocultos”, ie, no detectados. Es decir, la primera hipótesis fue que la materia estaba realmente formada por ondas. A estas ondas se las llamó *ondas piloto* u *ondas de materia*. Pero, si la materia estaba formada realmente por ondas, cómo se podían explicar las propiedades de partícula? Recordemos que, varios siglos antes, la luz parecía propagarse en línea recta, por lo que la primera teoría establecía que estaba formada por haces de partículas (Newton). Luego de detectar los fenómenos de interferencia y difracción, la teoría cambió y la luz pasó a ser considerada como ondas, pero estos fenómenos ondulatorios solo son apreciables a distancias comparables con su longitud de onda.

De Broglie argumentó que, si las ondas de materia existían, su longitud de onda debía ser tan corta que solo podemos observar su movimiento en promedio. Experimentos más sensibles deberían poder detectar fenómenos ondulatorios.

Supongamos, con de Broglie, que la materia está formada por ondas. Estas ondas deberían agruparse en un paquete de ondas. En ese caso, sería necesario que la velocidad de grupo de las ondas,  $v_g$  coincidiese con la velocidad  $v$  de la partícula, por ejemplo, un  $e^-$  libre:

La velocidad de grupo es:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Para una partícula libre:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Por la hipótesis de de Broglie:

$$p = \hbar k \quad \text{y} \quad E = \hbar \omega$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{1}{2m\hbar} 2p \frac{dp}{dk} = \frac{p}{m} \Rightarrow \text{se cumple que } v_g = v$$

Pero, como  $E = \frac{p^2}{2m}$ ,

$$\hbar \omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \Rightarrow \omega \text{ no es una función lineal de } k, \text{ por lo que esta onda es dispersiva! Eso}$$

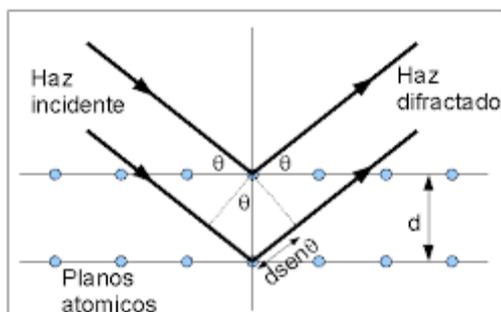
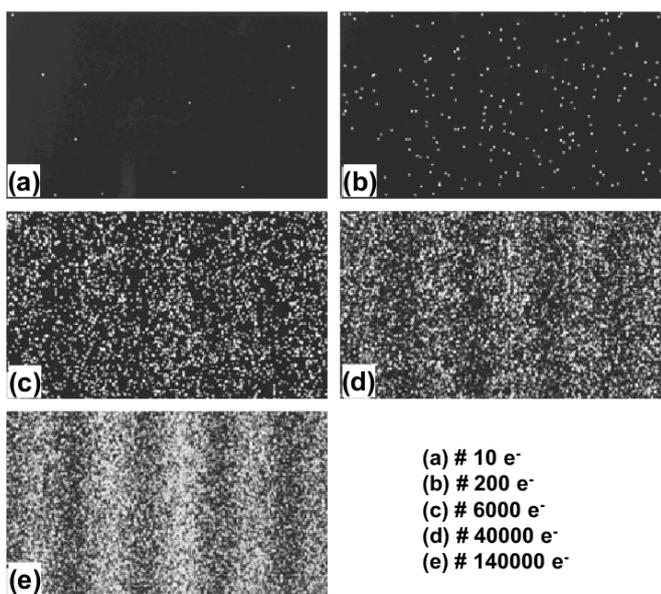
significa que, con el paso del tiempo, la onda se va deformando hasta desaparecer. Esto no puede ser así porque significaría que el  $e^-$  (incluso, cualquier componente de la materia y la materia misma) tendería a desaparecer, y ya sabemos que su vida media  $\rightarrow \infty$ .

Así que la conclusión es que *la materia no está formada por ondas*, pero tiene también características ondulatorias (igual que la radiación). Entonces, no podemos llamar a estos entes propiamente *partículas*, porque, si bien tienen características de partículas, también tienen características de ondas. Alguna vez se ensayó llamar a estos entes *ondículas*, pero, por suerte, pronto se abandonó esa manera de mencionarlos. Solo por un defecto del lenguaje (y para no llamarlos con ese nombre ridículo) vamos a seguir llamando a

estos entes como *partículas*. El problema reside en nuestros conceptos de “partícula” y “onda”. Estos son abstracciones, modelos, que ilustran una forma de comportarse. Si se dice “partícula”, lo primero que viene a la mente es una pelotita. Si se dice “onda”, imaginamos una cuerda vibrando. La pregunta es, por qué estos entes cuánticos, un  $e^-$ , por ejemplo, deberían comportarse como una pelotita o una cuerda vibrante?

Entonces, persiste un problema de interpretación de este “carácter ondulatorio”, que vamos a tratar de resolver en las próximas secciones.

- Acá vuelve a aparecer Einstein. Acotó que, si los  $e^-$  se comportaban como ondas, debían satisfacer fenómenos propios de las ondas, como interferencia y difracción. Y así fue, a pedido (y por casualidad).
- El experimento de Davisson y Germer (1927) lo mostró. Estaban estudiando el scattering de  $e^-$  por Ni y, por accidente, el blanco de Ni se les oxidó. Para quitarle el óxido, lo calentaron y, sin quererlo, provocaron una transición de fase. El Ni pasó de Ni amorfo a Ni cristalino, y el experimento comenzó a dar resultados totalmente diferentes. El número de  $e^-$  en función del ángulo de dispersión comenzó a tener máximos y mínimos  $\Rightarrow$  habían encontrado una figura de interferencia-difracción de  $e^-$ . Algo como lo que se ve en la figura:



Qué había pasado? Los átomos de Ni cristalino, espaciados regularmente, se comportaron como elementos difractores. Entonces, el cristal fue, para los  $e^-$ , una perfecta red de difracción:

La diferencia de camino óptico es:

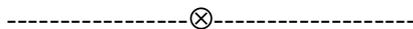
$$\Delta = 2dsen\theta = n\lambda \text{ para intensidad máxima.}$$

Si existe una onda asociada a los  $e^-$ , se puede determinar la longitud de onda de la figura de

difracción y compararlo con la predicción de de Broglie. Como la distancia entre planos atómicos del Ni

cristalino es  $d = 2.15 \text{ \AA}$ , la longitud de onda de los  $e^-$  resultó  $\lambda = 1.67 \text{ \AA}$  (noten el orden de magnitud). Y eso es, precisamente, lo que predecía la relación de de Broglie. Notemos que, dado el orden de magnitud de las longitudes de onda de los  $e^-$ , solo una red cristalina puede servir como red de difracción.

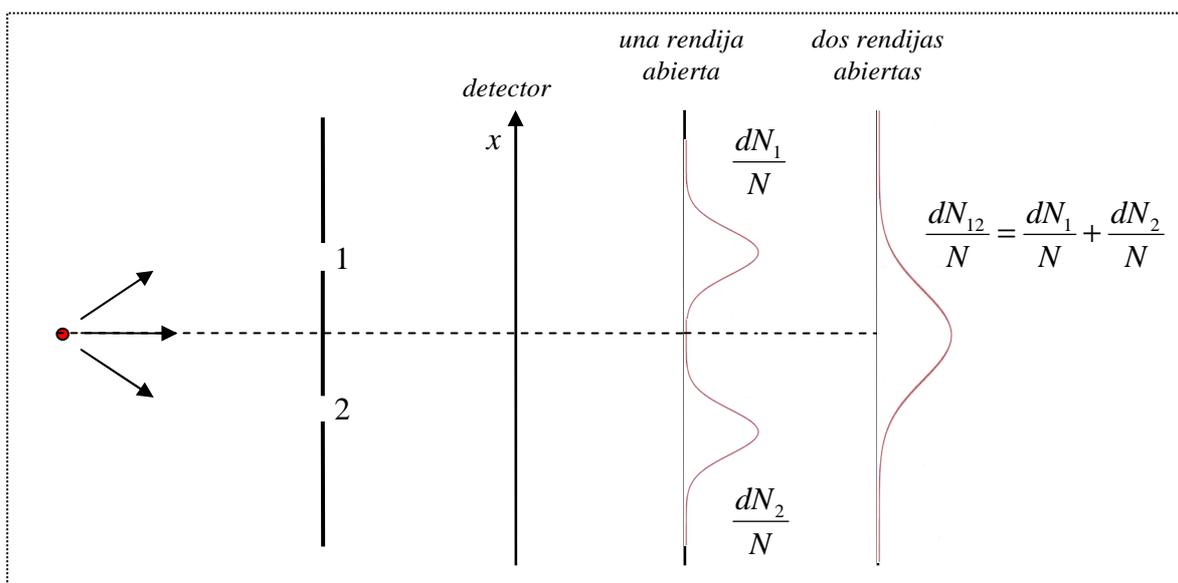
Hoy día la difracción de partículas (por ejemplo, neutrones) es una técnica habitual para determinar características de los cristales.



Vamos a hacer un experimento imaginario. Supongamos que hacemos una experiencia de difracción por dos ranuras usando a) balas (representando a las partículas); b) ondas, y c)  $e^-$ .

a) *Balas*

Consideremos una fuente de balas. Lo que vamos a determinar sobre el detector es la probabilidad de que una bala caiga entre  $(x, x + dx)$ , esto es  $\frac{dN}{N}$ . Podemos medirlo contando el número de balas que caen en ese intervalo y dividiendo por el número total de balas. Las balas, obviamente, llegan al detector en bultos enteros. En principio, dejamos solo la rendija 1 abierta, y detectamos sobre la pantalla la probabilidad  $\frac{dN_1}{N} \equiv$  probabilidad de que una bala, habiendo pasado por la rendija 1, caiga entre  $(x, x + dx)$ . Hacemos ahora lo mismo, pero por la rendija 2 y obtenemos  $\frac{dN_2}{N}$ . Si ahora dejamos ambas rendijas abiertas, se obtiene  $\frac{dN_{12}}{N}$ . Comprobamos que  $\frac{dN_{12}}{N} = \frac{dN_1}{N} + \frac{dN_2}{N}$ , es decir que, la probabilidad de que una bala caiga entre  $(x, x + dx)$  con las dos rendijas abiertas es la suma de las probabilidades por cada una de las rendijas.



b) *Ondas*

Lo que vamos a detectar ahora sobre la pantalla es la intensidad de la onda. Si repetimos la experiencia anterior, entonces, por una rendija vamos a detectar:

$$I_1 \propto |\phi_1(x)|^2 \text{ por la rendija 1}$$

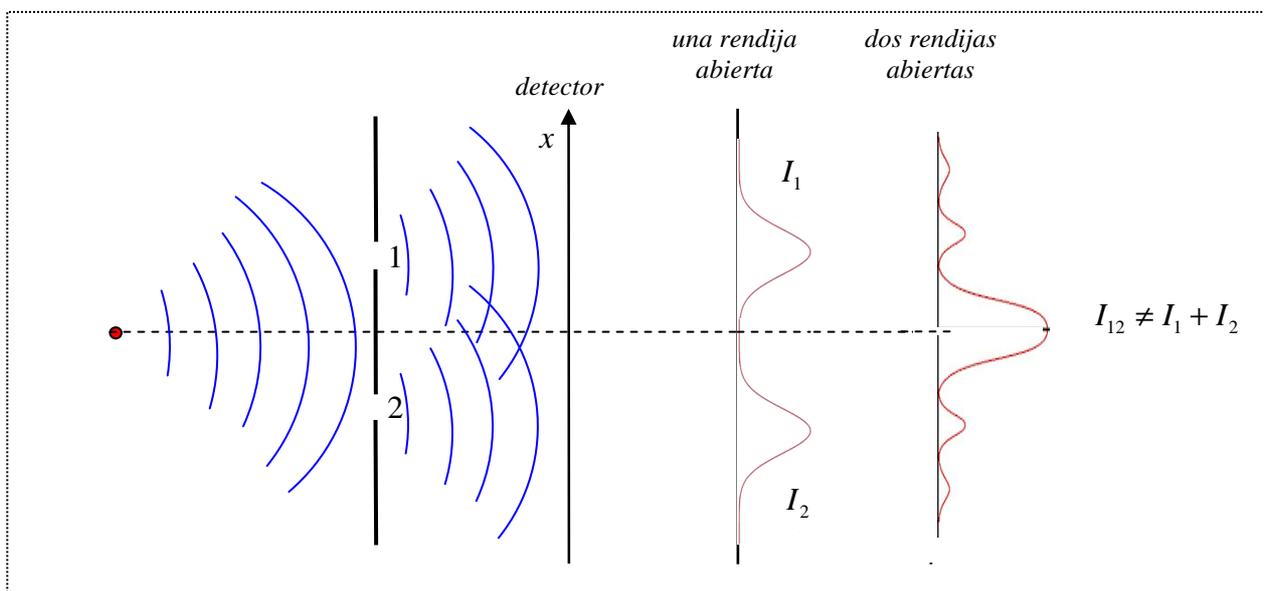
$$I_2 \propto |\phi_2(x)|^2 \text{ por la rendija 2}$$

donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son los frentes de onda que pasan por la rendija 1 y 2, respectivamente.

Al dejar ambas rendijas abiertas, obtenemos una figura de interferencia-difracción por dos rendijas, donde la intensidad sobre la pantalla  $I_{12}$  no es la suma de las intensidades que detectamos por una sola rendija:

$$I_{12} \propto |\phi_1(x) + \phi_2(x)|^2$$

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \neq I_1 + I_2 \quad \text{donde } 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \text{ es el término de interferencia.}$$



c) *Electrones*

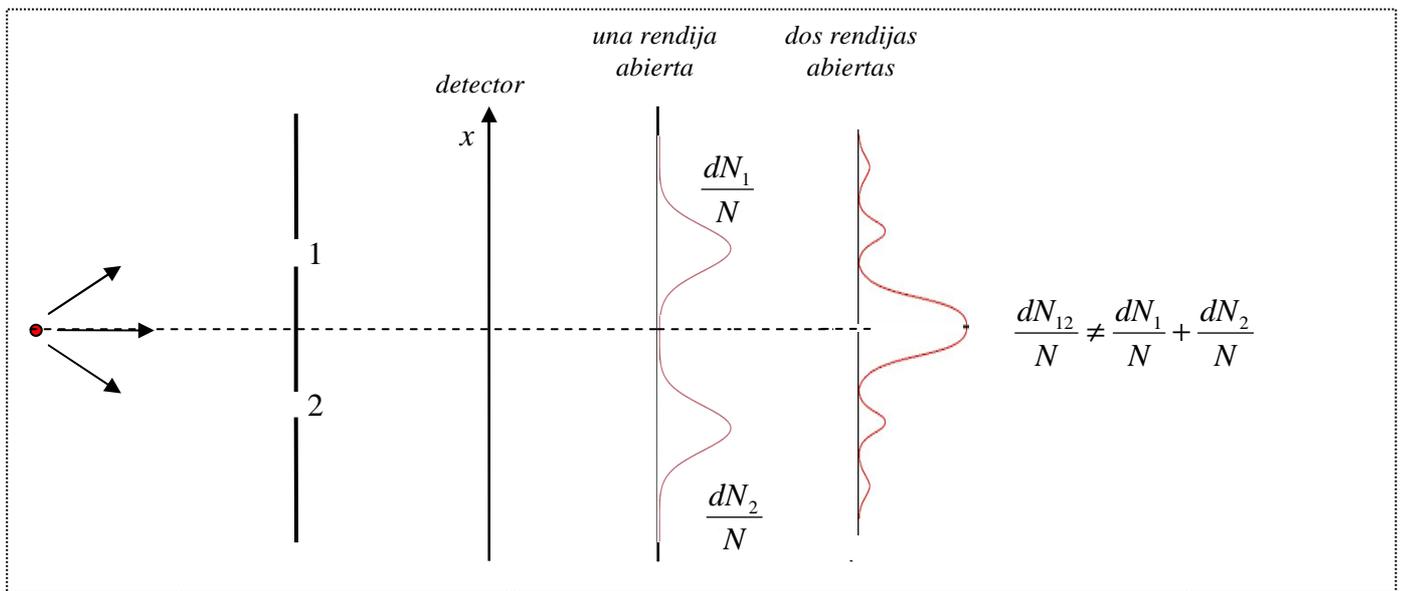
Para detectar los  $e^-$  sobre la pantalla ponemos toda una serie de contadores Geiger. Estos son unos aparatos para detectar radioactividad, y que cuentan las partículas que detectan. Cada vez que detectan una partícula emiten un sonido característico (algo así como un “tic”). Lo primero que observamos es que los  $e^-$  llegan al detector como bultos enteros e idénticos (igual que las balas). Por lo tanto, lo que estamos detectando es la probabilidad de que un  $e^-$  impacte en la pantalla entre  $(x, x + dx)$ . Es decir,

$\frac{dN}{N}$ . Este valor lo obtenemos de la misma manera que con las balas, contando el número de  $e^-$  que

llegan a  $(x, x + dx)$  y dividiendo ese número por el número total de  $e^-$ . Repitiendo la experiencia, encontramos la probabilidad de que el  $e^-$ , habiendo pasado por una única rendija (estando cerrada la

otra) caiga entre  $(x, x + dx)$ , es decir  $\frac{dN_1}{N}$  cuando está abierta la rendija 1, y  $\frac{dN_2}{N}$  cuando la rendija 2 es

la que está abierta. Si ahora abrimos ambas rendijas...



La probabilidad de que el  $e^-$  caiga entre  $(x, x + dx)$  estando abiertas ambas rendijas *no es la suma de las probabilidades*:

$$\frac{dN_{12}}{N} \neq \frac{dN_1}{N} + \frac{dN_2}{N}$$

y lo que se detecta sobre la pantalla es una figura de interferencia-difracción.

Igual que con las ondas, entonces, lo que pasa en la pantalla se puede describir mediante dos funciones  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$  tal que:

$$\frac{dN_1}{N} \propto |\phi_1(x)|^2$$

$$\frac{dN_2}{N} \propto |\phi_2(x)|^2$$

$$\text{y } \boxed{\frac{dN_{12}}{N} \propto |\phi_1(x) + \phi_2(x)|^2}$$

En suma:

*Los  $e^-$  se detectan como bultos enteros (como las balas), pero su probabilidad se comporta como la distribución de intensidades de una onda.*

Entonces, qué lo que está interfiriendo? La respuesta es un tanto curiosa: lo que interfiere es la probabilidad.

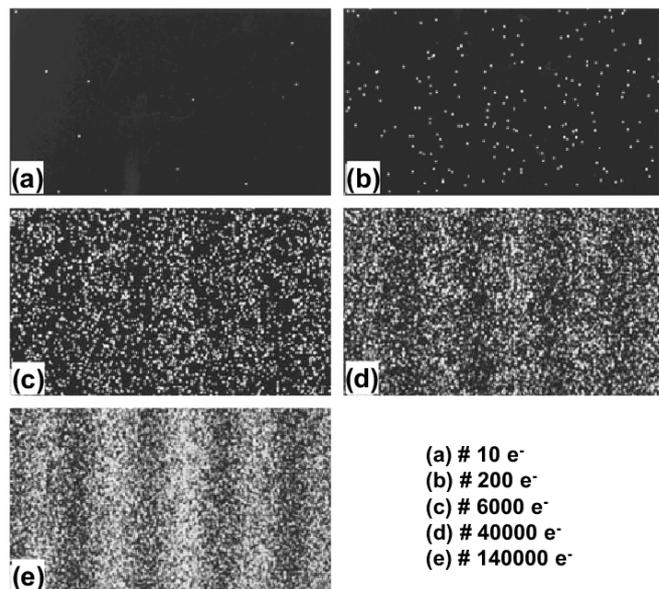
- Ahora bien: como  $\frac{dN_{12}}{N} \neq \frac{dN_1}{N} + \frac{dN_2}{N}$ , no es verdad que los  $e^-$  pasan, ya sea, por la rendija 1 o por la rendija 2 (un “o” excluyente)? O sí?

Supongamos que queremos detectar por qué rendija pasa el  $e^-$ . Necesitamos verlo. Agregamos una fuente de luz entre las dos rendijas. Como la carga dispersa la luz, cuando un  $e^-$  pase, dispersará luz hacia nuestro ojo y sabremos por cuál rendija pasó:

- Nunca vemos los dos destellos al mismo tiempo  $\rightarrow$  el  $e^-$  pasa por un agujero o por el otro. Pero ahora:

$\frac{dN'_{12}}{N} = \frac{dN'_1}{N} + \frac{dN'_2}{N} \Rightarrow$  se destruye la interferencia. Qué pasó? Existe interacción con los fotones y esto cambia su movimiento.

- Usemos fotones de menor frecuencia, por ejemplo, en el IR (es decir, menos energéticos), para que no perturben a los  $e^-$ . Pero menor frecuencia, significa longitud de onda  $\lambda$  más grande. Si  $\lambda >$  distancia entre las rendijas, vemos un destello borroso y no dos manchas separadas, ya que con luz de esa longitud de onda grande no podemos resolver las dos rendijas. Otra vez, nos quedamos sin saber por cuál rendija pasó el  $e^-$ .
- Bien. No podemos saber por cuál rendija pasa el  $e^-$ , pero algo debe quedar claro. El  $e^-$  *pasa* por alguna de las dos rendijas. De ninguna manera se produce una “pulverización” de los  $e^-$  (como, hablando mal, pasa con una onda – no una pulverización, obvio, sino una división del frente de onda). Los  $e^-$  llegan a la pantalla como bultos enteros. Es su probabilidad la que se comporta en forma ondulatoria. Si arrojó un  $e^-$  a la vez, este va a caer en algún punto de la pantalla. En algún punto, sí, pero en el que su probabilidad no sea nula. A media que voy arrojando  $e^-$ , estos van cayendo siempre en otros puntos con probabilidad no nula. Hasta que, si arrojó un número estadístico de  $e^-$ , voy a observar las características franjas con  $e^-$  y las franjas donde no ha caído ninguno. Observen otra vez, esta imagen:



-----⊗-----

- Un año después, en 1925, un físico austríaco, Erwin Schrödinger, desarrolla un formalismo matemático, basado fundamentalmente en la hipótesis de de Broglie, para formalizar (valga la redundancia) todas este cuerpo de ideas cuánticas. Eso es lo que vamos a comenzar a ver en la próxima clase. Pero, como es evidente que vamos a tener que lidiar con ondas, vamos a ver ahora un breve repaso de algunos temas relacionados con paquetes de ondas. O sea, vamos a abrir un paréntesis matemático hasta nuevo aviso.

- **Análisis de Fourier**

Cualquier función  $f(x)$  periódica, de período  $L$ , puede ser desarrollada en una serie de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right)$$

o, en notación compleja:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)} \quad \text{con } C_n \in \mathbb{C}$$

Para encontrar  $C_n$  se usa la ortogonalidad de las funciones:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) e^{-i\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)} dx = f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i\left(\frac{2\pi(n-m)x}{L}\right)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n L \delta_{nm} = C_m L$$

ya que la integral se anula salvo en el caso  $n = m$ . Entonces:

$$C_m = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) e^{-i\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)} dx$$

Las funciones  $\phi_m(x) = e^{i\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)}$  son ortogonales en el intervalo  $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ , ya que cumplen, en general:

$$\int_a^b \phi_m^*(x) \phi_n(x) dx = k \delta_{nm} \quad \text{y si } k = 1, \text{ son ortonormales.}$$

Estas funciones forman un conjunto completo  $\Rightarrow$  siempre se puede encontrar una serie infinita para describir  $f(x)$  exactamente, siempre que  $f(x) < \infty$  y tenga un número limitado de discontinuidades en

$$-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

- El intervalo puede extenderse a cualquiera de interés y no importa si  $f(x)$  es periódica o no:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{LC_n}{2\pi} e^{ikx} \Delta k$$

donde  $k = \frac{2\pi n}{L}$ ,  $\Delta k = \frac{2\pi \Delta n}{L}$  y  $\Delta n = 1$

Para que el desarrollo sea útil debe converger. Si  $L \rightarrow \infty$ ,  $C_n \rightarrow 0$  para que no diverja. Introducimos:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} LC_n < \infty$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} \Delta k \quad \text{si } L \rightarrow \infty, \Delta k \rightarrow dk$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk} \Rightarrow \text{integral de Fourier}$$

La función  $g(k)$  se obtiene muy fácilmente ya que:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx}_{2\pi\delta(k-k')}$$

donde  $\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx$  es la forma integral de la funcional delta de Dirac (lo demostraremos en la sección siguiente).

$$\Rightarrow \boxed{g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx} \Rightarrow \text{transformada de Fourier de } f(x).$$

- La función  $f(x)$ , integral de Fourier, puede representar un paquete de ondas, donde estamos “sumando” infinitas ondas de diferentes números de onda  $k$ . Por lo tanto, su transformada de Fourier (o función inversa de Fourier)  $g(k)$  es la distribución espectral, es decir, nos da el “peso” de cada componente  $k$ . A las variables  $(x, k)$  se las llama *variables inversas de Fourier*. Esto mismo podría haberse hecho considerando la evolución temporal del paquete, en cuyo caso, las variables inversas de Fourier hubieran sido  $(t, \omega)$ .

- En resumen:

Supongamos un paquete de ondas  $\psi(x, t)$ . Su dependencia espacial (nos paramos, por ejemplo a  $t = 0$  y vemos la forma espacial del paquete):

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

y su distribución espectral:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx$$

Si ahora observamos su evolución temporal (nos paramos en un  $x$  particular, por ejemplo  $x = 0$ , y observamos cómo cambia en el tiempo):

$$\psi(0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

y su distribución de frecuencias:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(0, t) e^{-i\omega t} dt$$

-----⊗-----

- *Ejemplo.* Supongamos una onda plana:

$$f(x) = e^{ikx}$$

Notemos que el espectro de  $k$ 's es un único  $k \Rightarrow \Delta k = 0$  y  $\Delta x \rightarrow \infty$  (se extiende sobre todo el espacio).

Se puede escribir:

$$f(x) = e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k') e^{ik'x} dk' \quad (1)$$

donde

$$g(k') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik'x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-ik'x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx$$

Si defino una “función”  $\delta(x-a)$  tal que:

$$\int_{\Delta} \delta(x-a) y(x) dx = \begin{cases} y(a) & \text{sii } a \in \Delta \\ 0 & \text{sii } a \notin \Delta \end{cases}$$

Esta función (en realidad, una funcional) se llama *delta de Dirac*. Entonces, comparando con (1):

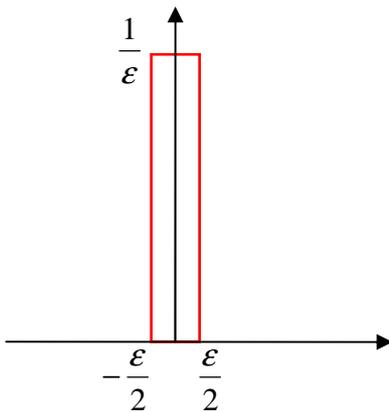
$$\Rightarrow g(k') = \sqrt{2\pi} \delta(k-k') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx \Rightarrow \boxed{\delta(k-k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx}$$

Notemos que:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x-a) y(x) dx = 0 \quad \text{sii } a \notin [x_1, x_2]$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x-a) dx = 1 \quad \text{sii } a \in [x_1, x_2]$$

La funcional delta de Dirac se puede pensar como el límite de una curva picuda, que se angosta cada vez más, a la vez que aumenta su altura, de tal manera que el área bajo la curva permanece constante e igual a 1. Por ejemplo:



$$\delta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } -\frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si hacemos, aplicando el teorema del valor medio:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_{\varepsilon}(x) dx \cong f(0) \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \delta_{\varepsilon}(x) dx = f(0)$$

Cuanto más chico es  $\varepsilon$ , mejor es la aproximación  $\Rightarrow$  es exacta para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

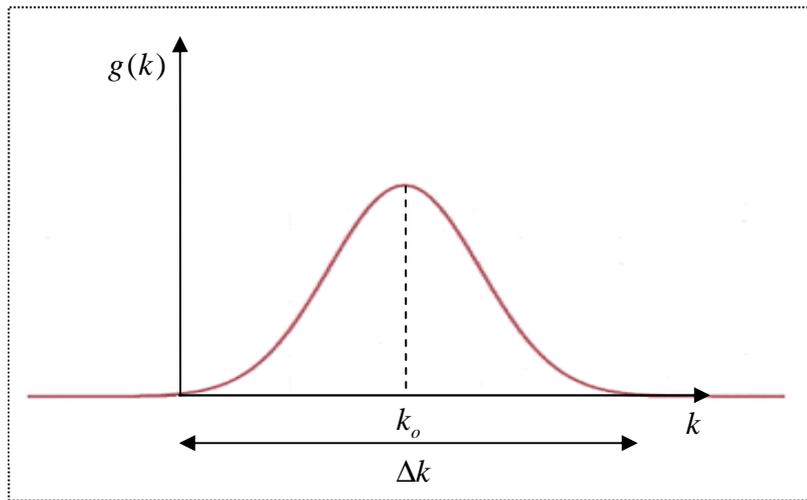
-----⊗-----

- Es un hecho conocido que cuanto más ancho es el rango espectral (es decir, cuantos más  $k$ 's incluyo) más angosto es el paquete (y viceversa). Lo acabamos de ver en el ejemplo anterior, donde  $\Delta k = 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow \infty$ . Vamos a estimar, entonces, el ancho de un paquete en función de  $\Delta k$ .

- Supongamos un paquete de ondas:

$$\psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{i(k-k_0)(x-x_0)} dk$$

donde  $g(k)$  es una función que varía suavemente en un cierto intervalo  $\Delta k$ ,  $k_0$  es el máximo de  $g(k)$ , y  $x_0$  es la posición del centro del paquete a  $t = 0$ .

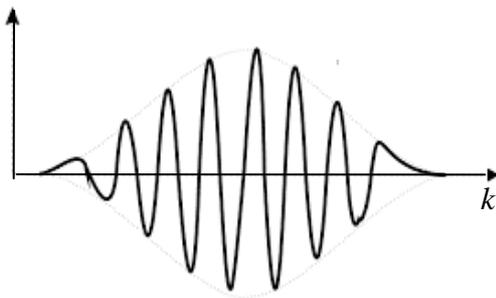


Para estimar el ancho del paquete, nos vamos a parar en un  $x$  determinado y nos fijamos si  $\psi(x,0) \rightarrow 0$  (ie, estamos fuera del paquete), o  $\psi(x,0)$  tiene un valor grande ( $x \in$  al paquete). Puede haber dos casos:

- a) Supongamos que  $x$  es tal que  $|x - x_0| > \frac{1}{\Delta k}$  (nos ubicamos en un  $x$  alejado del centro del paquete).

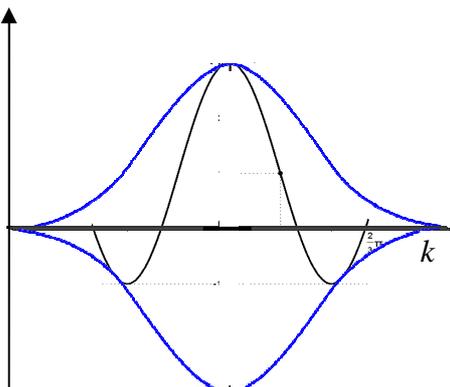
En ese caso, la función  $e^{i(k-k_0)(x-x_0)}$  oscila muchas veces en el intervalo  $\Delta k$  (pues el exponente es grande):

$\Rightarrow$  la integral, es decir,  $\psi(x,0) \rightarrow 0$



- b) Si  $x$  es tal que  $|x - x_0| < \frac{1}{\Delta k}$  (un  $x$  cerca del centro del paquete):

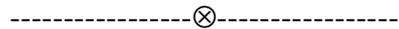
El exponente de  $e^{i(k-k_0)(x-x_0)}$  es chico y la función apenas oscila en el intervalo  $\Delta k \Rightarrow$  la integral, es decir,  $\psi(x,0)$  tiene un valor considerable.



De acuerdo a esto, si  $\Delta x$  es el valor aproximado del ancho del paquete (es decir,  $|x - x_0|$  tal que más allá de ese  $x$  el paquete tiene un valor despreciable, o sea  $\psi(x,0) \rightarrow 0$ ), entonces, una forma de estimarlo es cuando  $|x - x_0| \geq \frac{1}{\Delta k}$ . Es decir:

$$\boxed{\Delta x \Delta k \geq 1} \quad (2)$$

Este producto está acotado por abajo, y no debe tomarse literalmente. Simplemente indica orden de magnitud y el valor de la cota depende de cada caso particular. Muestra lo que ya habíamos anticipado, es decir que el ancho del paquete es tanto más angosto cuanto más grande es la dispersión de los  $k$ 's que necesito para describirlo, es decir, es el rango espectral.



• Volvamos a la física. La relación (2) es propia de cualquier paquete de ondas. Si ahora pensamos que esto es un paquete de de Broglie:

$$k = \frac{p}{\hbar} \Rightarrow \Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \hbar}$$

Esta relación es lo que se llama la *relación de incerteza de Heisenberg*. Y qué nos dice? Nos dice que no se puede medir la posición y el impulso de una partícula con una precisión mayor que esta. Y no es un problema de la precisión de nuestro aparato de medida. Es un límite absoluto que nos impone la naturaleza y que proviene, nada más y nada menos, que de la naturaleza ondulatoria de estas partículas. Esto tiene una consecuencia inmediata. No se puede hablar de trayectorias. Para definir una trayectoria, necesitamos conocer en cada instante la posición y el impulso de la partícula. Y el principio de incerteza, nos dice que eso no es posible. Noten que, si conocemos en un instante dado la posición de una partícula con precisión, perdemos totalmente la información sobre su impulso. Y si conocemos su impulso, la partícula podría estar en cualquier parte del espacio, es decir, totalmente delocalizada. Esta relación puede decirse que está en la base de la mecánica cuántica (nos habla del carácter ondulatorio de las partículas). Si fuera posible medir con total precisión la posición y el impulso simultáneamente, la mecánica cuántica colapsaría.

• Equivalentemente, podríamos haber hecho un análisis similar con las funciones inversas de Fourier que dependen del tiempo  $t$  y de la frecuencia  $\omega$ . Y habríamos llegado a:

$$\Delta t \Delta \omega \geq 1$$

Como la frecuencia está relacionada con la energía:

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \Rightarrow \Delta \omega = \frac{\Delta E}{\hbar}$$

Y entonces, surge una segunda relación de incerteza:

$$\boxed{\Delta t \Delta E \geq \hbar}$$

Insisto, recuerden que, si bien estas relaciones están acotadas por abajo,  $\hbar$  indica solo orden de magnitud. Más adelante vamos a encontrar un límite inferior exacto.

De esta última relación vamos a dar un ejemplo. Si irradiamos los átomos de un gas con luz de una frecuencia  $\nu_{10}$ , correspondiente a la diferencia de energía entre el nivel fundamental y el primer excitado, los átomos pasan a ese primer nivel excitado. Estos estados excitados tienen un tiempo de vida medio finito  $\Delta t$ . El tiempo de vida medio es el intervalo de tiempo en el cual se desexcitan una cantidad considerable de los átomos, digamos, el 80%. Al desexcitarse, los átomos emiten radiación de energía  $h\nu_{10} = E_1 - E_0$ , que puede analizarse con un espectrómetro. Lo que se observa es que si el estado excitado tiene un tiempo de vida corto (es decir, tenemos más certeza sobre el momento en el cual se desexcitan los átomos), las líneas espectrales son más anchas, o sea, perdemos certeza sobre la frecuencia emitida o, lo que es lo mismo, sobre la diferencia de energía entre los dos niveles. Por el contrario, un tiempo de vida más largo, nos da líneas espectrales más definidas.

