Guía 1: Termometría, calorimetría y primer principio

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 7: Un sistema consiste en un resorte cuyas variables termodinámicas son la elongación x, la temperatura absoluta T y la fuerza F que ejerce el resorte. La ecuación de estado y la energía están dados por:

$$\begin{aligned} F &= -kx + b\mu T \\ E &= \frac{1}{2}kx^2 + cT \end{aligned}$$

donde $\mu = 2 \cdot 10^5 dinas/cm$, $b = 0.025cm/K$, $c = 1\,J/K$

a) Cuánto vale la capacidad calorífica del resorte a $x = cte$?

b) Idem, pero a $F = cte$.

c) Halle la ecuación de las adiabáticas del resorte.

d) Inicialmente, no hay fuerzas externas aplicadas al resorte. En un cierto instante, se aplica sobre el mismo una fuerza de $300\vec{g}$, manteniéndose al resorte en contacto con una fuente térmica a $300°K$. Calcular la variación de energía y el calor absorbido por el resorte.

Solución: a) Para resolver este problema tenemos que recordar el primer principio de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W \tag{1}$$

y en su versión diferencial:

$$dU = \delta Q - \delta W \tag{2}$$

Con esto, podemos hacer lo siguiente:

$$C_x = \left.\frac{\delta Q}{\delta T}\right|_x = \left.\frac{dU}{dT}\right|_x + \left.\frac{\delta W}{dT}\right|_x = \left.\frac{dE}{dT}\right|_x = c = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

b) Es similar la operación:

$$C_F = \left.\frac{\delta Q}{\delta T}\right|_F = \left.\frac{dU}{dT}\right|_F + \left.\frac{\delta W}{dT}\right|_F$$

Por otro lado, dado que $F = cte$ quiere decir que $dF = 0$

$$dF = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_T dx + \left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_T dT = -kdx + b\mu dT$$

Esto lleva a:

$$\frac{dx}{dT} = \frac{b\mu}{k} \tag{3}$$

Ahora trabajamos con la expresión para E:

$$\left.\frac{dE}{dT}\right|_F = \left.\frac{\partial E}{\partial x}\right|_F \frac{dx}{dT} + \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_F \frac{dT}{dT} = \left.\frac{\partial E}{\partial x}\right|_F \frac{b\mu}{k} + c$$

De modo que llegamos a:

$$\left.\frac{dE}{dT}\right|_F = b\mu x + c \tag{4}$$

Básicamente el trabajo es:

$$\left.\frac{\delta W}{\delta T}\right|_F = \frac{F\delta x}{\delta T} = F\frac{dx}{dT} = F\frac{b\mu}{k} \tag{5}$$

Finalmente:

$$c_F = b\mu x + c + F\frac{b\mu}{k} = b\mu\left(x + \frac{F}{k}\right) + c = \frac{b^2\mu^2}{k}T + c \tag{6}$$

c) El caso adiabático significa: $\delta Q = 0$

El primer principio queda: $dE + \delta W = 0$

$$\left.\frac{\partial E}{\partial x}\right|_T dx + \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_x dT + F dx = 0 \tag{7}$$

Si se reemplaza en estas expresiones se obtiene:

$$c\frac{dT}{T} + b\mu dx = 0 \tag{8}$$

Se integra de manera inmediata:

$$T = T_0 \exp\left(-\frac{b\mu}{k}x\right) \tag{9}$$

d) Por conveniencia pediremos que $\mu = k$, para calcular la variación de energía volvemos a recurrir al primer principio de la termodinámica:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx = 0,56\mathrm{J}$$

Falta calcular la variación de energía ΔE y finalmente con eso se obtiene el calor.