Guía 5: Cuerpo negro, efecto fotoeléctrico, efecto Compton

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríban a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 5: a) Suponiendo que la densidad de energía espectral $u_\nu(T)$ depende solamente de ν, T y de las constantes dimensionales c (velocidad de la luz en el vacío) y k_B (constante de Boltzmann $= R/N_a$) mostrar vía analisis dimensional que

$$u_\nu(T) = \Pi \frac{\nu^2 k_B T}{c^3}$$

donde Π es un número real.
b) Suponiendo que existe una nueva constante fundamental que interviene en el problema, mostrar que

$$\begin{aligned} u_\nu(T) &= \frac{\nu^2 k_B T}{c^3} f\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \\ &= \frac{h\nu^3}{c^3} f_1\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \end{aligned}$$

donde

$$f_1(x) \equiv \frac{f(x)}{x}$$

Ayuda: Uno tendrá una nueva constante adimensional Π' tal que $\Pi = f(\Pi')$. Mostrar que no se pierde generalidad escribiendo $\Pi' = \alpha\nu T^\chi$ con α una combinación de c, k_B y la nueva constante. Determine χ usando la ley de Stefan-Boltzmann. Se obtiene la forma exacta del resultado definiendo, al final, $\alpha \equiv h/k_B$. Wien, usando datos experimentales, propuso $f_1(x) = \exp(-x)$.
c) Mostrar que se puede escribir el resultado anterior de la forma siguiente

$$u_\lambda(T) = \frac{hc}{\lambda^5} g(y)$$

con $g(y) \equiv y f(\frac{1}{y})$, $y \equiv \lambda k_B T/(hc)$. Usando este último resultado, demostrar la ley de desplazamiento de Wien

$$\lambda_m T = cte$$

Solución:
La idea es a partir de análisis dimensional es ver como se pueden reobtener las leyes que ya tenemos.
A partir del teorema Π busquemos el número adimensional buscando con el conjunto de variables que nos interesan:

$$\Pi \cdot c^\alpha \cdot k_B^\beta \cdot T^\gamma \cdot \nu^\delta \cdot u^\epsilon \tag{1}$$

$$\Pi \cdot \left(\frac{L}{t}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{mL}{t^2 T}\right)^\beta \cdot T^\gamma \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^\delta \cdot \left(\frac{m}{L^2 t^2}\right)^\epsilon \tag{2}$$

agrupando convenientemente se llega a que hay que resolver el siguiente sistema:

$$\alpha + \beta - 2\epsilon = 0 \tag{3}$$
$$\alpha + 2\beta + \delta + \epsilon = 0 \tag{4}$$
$$\beta + \epsilon = 0 \tag{5}$$
$$\beta - \gamma = 0 \tag{6}$$

Resolviendo este sistema se llega a que:

$$\boxed{u_\nu = \frac{k_B T \nu^2}{c^3}\Pi} \tag{7}$$

b) Proponemos una nueva constante adimensional:

$$\Pi = f(\Pi') \qquad \text{siendo } \Pi' = \alpha\nu T^{\chi} \tag{8}$$

Así que ahora podemos reescribir u como:

$$u_\nu = \frac{k_B T \nu^2}{c^3} f(\Pi') = \frac{k_B T \nu^2}{c^3} f(\alpha\nu T^{\chi}) \tag{9}$$

Para determinar χ usamos la ley de Stephan-Boltzmann:

$$\sigma T^4 = \int_0^\infty u_\nu(T) d\nu = \frac{kT}{c^3}\int_0^\infty \nu^2 f(\alpha\nu T^{\chi}) d\nu \tag{10}$$

para continuar hacemos el siguiente cambio de variables: $z = \alpha\nu T^{\chi}$ y $dz = \alpha T^{\chi} d\nu$, asíla integral queda:

$$\sigma T^4 = \frac{kT}{c^3}\int_0^\infty \frac{z^2}{T^{2\chi}} f(z) \frac{1}{\alpha T^{\chi}} dz = \frac{kT^{1-3\chi}}{\alpha c^3}\int_0^{\chi} z^2 f(z) dz \tag{11}$$

Para mantener la adimensionalidad, $\chi = -1$, si $\alpha = h/k$, entonces

$$u_\nu = \frac{k_B T \nu^2}{c^3} f\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \tag{12}$$

Se puede reescribir esta ley proponiendo una función que elimine la temperatura de la constante adimensional original: $f(x) = x f_1(x)$

$$\boxed{u_\nu = \frac{h\nu^3}{c^3} f_1\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} \tag{13}$$

c) Procedamos conforme a lo pedido: $g(y) = y f(1/y)$ donde $y = \lambda \dfrac{k_B T}{hc}$ queda de la siguiente manera:

$$g(y) = \frac{k_B T}{h\nu} f\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \tag{14}$$

Retomemos la expresión de u_ν:

$$u_\nu = \frac{h\nu^3}{c^3} g(y) \tag{15}$$

Dado que $\nu = \dfrac{c}{\lambda} \Rightarrow d\nu = -\dfrac{c}{\lambda^2} d\lambda$

$$u_\nu(T) d\nu = -u_\nu(T)\frac{c}{\lambda^2} d\lambda = -\frac{hc}{\lambda^5} g(y) d\lambda = -u_\lambda(T) d\lambda \tag{16}$$

En consecuencia:

$$\boxed{u_\lambda(T) = \frac{hc}{\lambda^5} g\left(\lambda\frac{k_B T}{hc}\right) = \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^5 \frac{1}{y^5} hc\; g(y)} \tag{17}$$

Proponiendo la forma de Wien:

$$u_\lambda(T) = \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^5 \frac{hc}{y^5} y e^{-1/y} \tag{18}$$

Falta derivar respecto de y, igualar a cero y se obtiene la ley de desplazamiento.