Guía 9: Potenciales en 2-D y 3-D, Momento angular, átomo de hidrógeno, Espín

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríban a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 2: Considere el siguiente potencial en dos dimensiones:

$$V(x,y) = V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Considere que la energía $E < V_0$. Calcule la función de onda y la corriente de probabilidad $\vec{J}$. ¿Cuál componente de $\vec{J}$ espera que sea nula? ¿Y cuál no? Interprete. Estime el "tiempo" que la partícula pasa en la región clásicamente prohibida.

Solución: Propongo una función del tipo $\Psi(x,y) = f(x)g(y)$ y lo reemplazo en la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right] + V(x)\Psi = E \tag{1}$$

dividiendo por Ψ:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g}\right] + V(x) = E_x + E_y \tag{2}$$

Las condiciones de contorno son:

Caso $E > V_0$:

$f_+(0) = f_-(0); \qquad f'_+(0) = f'_-(0);$

$$k_x = \begin{cases} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E_x} & x < 0 \\ \\ \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E_x - V_0)} & x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E_y} \tag{4}$$

$$\Psi(x,y) = \begin{cases} (A_- e^{ik_x^- x} + B_- e^{-ik_x^- x})(Ce^{ik_y y} + De^{-ik_y y}) & x < 0 \\ \\ (A_+ e^{ik_x^+ x} + B_+ e^{-ik_x^+ x})(Ce^{ik_y y} + De^{-ik_y y}) & x \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Caso $E < V_0$:

$f_+(0) = f_-(0); \qquad f'_+(0) = f'_-(0);$

$$k_x = \begin{cases} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E_x} & x < 0 \\ \\ \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E_x - V_0)} & x \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E_y} \tag{7}$$

$$\Psi(x,y) = \begin{cases} (A_- e^{ik_x^- x} + B_- e^{-ik_x^- x})(Ce^{ik_y y} + De^{-ik_y y}) & x < 0 \\ \\ (A_+ e^{k_x^+ x} + B_+ e^{-k_x^+ x})(Ce^{ik_y y} + De^{-ik_y y}) & x \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

Además $\Psi(x,y) \to 0$ cuando $x \to +\infty$

La corriente de probabilidad es:

$$\vec{J} = -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi * \nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi *) \tag{9}$$