Guía 9: Potenciales en 2-D y 3-D, Momento angular, átomo de hidrógeno, Espín

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríban a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 3: La energía potencial de un oscilador armónico tridimensional esférico puede escribirse como:

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right) \end{aligned}$$

Hallar las autofunciones y autovalores de $\hat{H}$. Analizar la degeneración de cada nivel de energía.
Solución: Se comienza planteando separación de variables:

$$\Psi(x,y,z) = f_{n_X}(x)g_{n_y}(y)h_{n_z}(z) \tag{1}$$

Siendo cada uno de ellos de la forma:

$$f_{n_x}(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2} \tag{2}$$

Donde H_n son los polinomios de Hermite y se tiene que:

$$E_x = \left(n_x+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad E_y = \left(n_y+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad E_z = \left(n_z+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$
$$E = E_x + E_y + E_z$$

En el estado fundamental: $n_x = n_y = n_z = 0$, su energía es $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ y no hay degeneración.

$$\Psi_{000}(x,y,z) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2}e^{\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)r^2} \tag{3}$$

Notar que $H_0 = 1$y $r^2 = x^2+y^2+z^2$

El primer estado excitado tiene degeneración 3:

$$E_{100} = E_{010} = E_{001} = \frac{5}{2}\hbar\omega \tag{4}$$

($H_1(\zeta) = 2\zeta$) y los autoestados posibles son

$$\Psi_{100} = \Psi_{010} = \Psi_{001} \tag{5}$$

Para el estado siguiente la degeneración es 6.

En general se calcula como:

$$g(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \tag{6}$$