Soluciones 2do. Parcial - Física 4 - 1er. Cuatrimestre de 2018.

Cátedra Llois

1) En los primeros momentos despues del Big Bang el universo era muy denso y estaba muy caliente. Una sopa de partículas elementales: quarks, electrones, fotones y neutrinos. A medida que se va enfriando, los quarks se agregan formando protones y neutrones. Mucho más tarde se forman los primeros átomos y el universo se vuelve 'transparente a los fotones' (los fotones víajan por el universo prácticamente sin interactuar). La radiación cósmica de microondas esta constituida por esos fotones remanentes de ese momento del universo. El espectro de la radiación cósmica de microondas corresponde al de un cuerpo negro. Son **VERDADERAS o FALSAS** las siguientes afirmaciones? Justifique brevemente (una frase).

   a) La explicación de por qué el universo se volvió transparente a los fotones es que una vez que los electrones dejan de ser libres ya no hacen scattering Compton con los fotones.
   VERDADER0. Ahora los fotones pueden ser absorbidos por los atomos via efecto fotoelectrico o seguir de largo. Como el universo se expandio y ya no es tan denso la probabilidad de chocar con una particula libre es muy baja y los fotones viajan por el universo sin 'verlo' (sin cambio de momento lineal).

   b) Antes de formarse los atomos, los fotones interactuaban con los electrones vía efecto fotoeléctrico, pero una vez que se formaron los átomos solo interactuaban vía efecto Compton.
   FALSO. Es al reves. Cuando los electrones estan ligados solo pueden interactuar con los fotones via efecto fotoelectrico porque el scattering Compton con un electron ligado violaria la conservacion del momento lineal.

   c) Podemos asociar la radiacion cósmica de microondas con la radiación de un cuerpo negro porque podemos considerar el universo isotérmico. Si no pudiéramos considerarlo isotérmico, no podriamos asociarle a la radiación una temperatura.
   VERDADERO. La ley de Planck $\rho(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^3(e^{h\nu/k_BT}-1)}$ *describe la radiacion de un cuerpo negro en equilibrio termodinamico lo cual implica equilibrio termico.*
   La explicacion de porque podemos considerar el universo isotermo es mas compleja: El universo se va enfriando a medida que se expande y por eso los fotones que nos llegan desde las zonas mas lejanas (en el tiempo y en el espacio) radiariarian como un cuerpo negro a temperatura mayor, pero este efecto esta contrarrestado por el hecho de que la radiacion de estos fotones esta corrida hacia al rojo debido a la expansion del universo.

   d) Si graficamos el espectro de la radiación cósmica de microondas como radianza espectral en función de frecuencia obtenemos dos máximos.
   FALSO. El espectro del cuerpo negro a una cierta temperatura T tiene un solo maximo. Segun Ley de Wien $\Lambda_{max} = \frac{b}{T}$ *donde b es la constante de desplazamiento de Wien.*

   e) Si graficamos el espectro de la radiación cósmica de microondas como radianza espectral en funcion de frecuencia, podemos deducir la temperatura del cuerpo negro.
   VERDADERO. La temperatura del cuerpo negro se puede calcular a partir de la ley de

Wien o bien derivando la radianza $\rho(\nu, T)$ en la ley de Planck respecto de la frecuencia $\nu = \frac{c}{\Lambda}$, igualando a zero para encontrar el minimo y despejando la temperatura.

2) La función de onda de un electrón libre está dada por $\psi(x) = A.e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}}$

a) Calcular la constante de normalización.

Respuesta La constante de normalización se obtiene pidiendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1 \Rightarrow |A|^2 = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \tag{1}$$

b) Obtenga la función de onda normalizada en el espacio de los k ó en el de los momentos ($\phi(k)$ o $\phi(p)$).

Respuesta Para obtener la función de onda en el espacio de momentos tengo que hacer la transformada de Fourier. Si se trabaja correctamente, la función de onda obtenida estará normalizada:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} A.e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}} e^{-ipx/\hbar} dx \tag{2}$$

$$\phi(p) = \frac{\sqrt{2} A \sigma_x}{\sqrt{\hbar}} e^{-\frac{p^2\sigma_x^2}{\hbar^2}} = B e^{-\frac{p^2\sigma_x^2}{\hbar^2}} \tag{3}$$

c) Calcule $< x >$ y $< p >$.

Respuesta Como tanto la función de onda en el espacio de coordenadas como en el espacio de momentos son gaussianas centradas en cero, sabemos que los valores medios serán los centros de las distribuciones. Por lo tanto dan cero en ambos casos.

d) Considere actuar sobre la función de onda con el operador $\hat{T} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0}$ (generador de la simetría de traslación asociada a la conservación del momento). Que espera que ocurra en el espacio de posiciones? Que espera que ocurra en el espacio de momentos? Calcule $< x >$ y $< p >$ en el estado que resulta de aplicar este operador al estado original del electrón.

Ayuda: Utilice que, en la representación de momento, $\hat{p} = p$.

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p) e^{ipx/\hbar} dp; \qquad \Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx. \tag{4}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} e^{ibx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{2a}}$.

Respuesta Dado que el operador traslación contiene al operador momento, al aplicarlo sobre un autoestado de momento $\Phi(p)$ el operador $\hat{p}$ pasa a ser el autovalor p. (Ya que $\hat{p}\Phi(p) = p\Phi(p)$ y el operador traslacion se puede expandir en serie de Taylor.):

$$\hat{T}\phi(p) = e^{i\hat{p}x_0/\hbar} \Phi(p) = e^{ipx_0/\hbar} \Phi(p) \tag{5}$$

y ahora antitransformo fourier para obtener $\hat{T}\psi(x)$

$$\hat{T}\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}\Phi(p) e^{ipx/\hbar} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx_0/\hbar} B e^{-\frac{p^2\sigma_x^2}{\hbar^2}} e^{ipx/\hbar} dp \tag{6}$$

$$\hat{T}\Psi(x) = A.e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\sigma_x^2}} \tag{7}$$

Alternativamente podemos expandir el operador traslacion en serie de Taylor y aplicarlo sobre $\Psi(x)$ o tambien podriamos usar el hecho de que el operador traslacion es unitario $\hat{T}^\dagger\hat{T} = \hat{I}$ (I es la identidad): Dada una traslacion $\Psi_2(x) = \hat{T}(x_0)\Psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0}\Psi(x)$,

$$\langle\Psi_2(x)|\hat{x}||\Psi_2(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\hat{T}^\dagger(x_0)\hat{x}\hat{T}(x_0)\Psi(x)dx = \langle\hat{x}\rangle + x_0\hat{I} \tag{8}$$

donde se uso que $[\hat{x}, \hat{T}(x_0)] = x_0\hat{T}(x_0)$ y el hecho de que las autofunciones $\Psi(x)$ son ortonormales $\langle\Psi(x)|\Psi(x)\rangle$= 1.
Los valores esperados despues de la traslacion son,

$$\langle x\rangle = x_0 \qquad \langle p\rangle = 0 \tag{9}$$

ya que el operador translada el valor medio de la posición pero no altera el del momento.

3) Considere un oscilador armónico en el estado (masa m, frecuencia w):

$$\psi(x, t = 0) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\phi_0 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\phi_1$$

donde ϕ_0 y ϕ_1 son el estado fundamental y el primer estado excitado del oscilador armónico, respectivamente.

a. Escribir la evolución temporal de la función de onda.

Respuesta Como la función de onda es la combinación lineal de dos autofunciones del opardor energia ($\hat{H}\phi_n = E_n\phi_n$), aplico la evolución temporal a cada autofunción por separado:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\phi_0 e^{-iE_0t/\hbar} + \sqrt{\frac{1}{3}}\phi_1 e^{-iE_1t/\hbar} \tag{10}$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $(3/2)\hbar\omega$ si se mide la energía a t=0? ¿Y a un tiempo t genérico?

Respuesta Dado que para medir una enegía $\frac{3}{2}\hbar\omega = E_1$ mi sistema necesariamante debe estar en el autoestado ϕ_1 la probabilidad se calcula,

$$P(E = E_1) = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^*\psi(x, t)dx\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^*(\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_0 e^{-iE_0t/\hbar} + \sqrt{\frac{1}{3}}\phi_1 e^{-iE_1t/\hbar})dx\right|^2 \tag{11}$$

Como los autoestados son ortogonales:

$$P(E = E_1) = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^*\sqrt{\frac{1}{3}}\phi_1 e^{-iE_1t/\hbar}dx\right|^2 \tag{12}$$

Como se encuentran normalizados:

$$P(E = E_1) = \frac{1}{3}\left|e^{-iE_1t/\hbar}\right|^2 = \frac{1}{3} \tag{13}$$

Donde se vé que es independiente del tiempo.

c. Calcular el valor medio de la posición en función del tiempo, $< x(t) >$.
Respuesta Para calcular el valor medio uso:

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \phi_0^* e^{iE_0 t/\hbar} + \sqrt{\frac{1}{3}} \phi_1^* e^{iE_1 t/\hbar} \right) \hat{x} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \phi_0 e^{-iE_0 t/\hbar} + \sqrt{\frac{1}{3}} \phi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} \right) \tag{14}$$

Agrupando adecuadamente las constantes, reemplazando las energías correspondientes y con la fórmula de Euler en las exponenciales imaginarias se llega a:

$$\langle x \rangle = \frac{2}{3} \frac{\hbar}{m\omega_0} cos((E_0 - E_1)t/\hbar) \tag{15}$$

d. Calcular el valor medio del momento en función del tiempo, $< p(t) >$.
Ayuda: utilizar el teorema de Ehrenfest: $\frac{d<\hat{A}>}{dt} = \frac{-i}{\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial_t} \rangle$.
Respuesta Primero, hay que tener en cuenta que el Hamiltoniano es:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 \hat{x}^2}{2} \tag{16}$$

Reemplazando en el conmutador:

$$\left[\hat{p}, \hat{H}\right] = [\hat{p}, (\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 \hat{x}^2}{2})] \tag{17}$$

y utilizando las relaciones de conmutación conocidas:

$$\left[\hat{p}, \hat{H}\right] = -i\hbar m\omega^2 x \tag{18}$$

Tomando valor medio a ambos lados y reemplazando el valor medio de la posición obtenida en el punto c), se tiene:

$$\left\langle \left[\hat{p}, \hat{H}\right] \right\rangle = -i\hbar m\omega^2 \langle x \rangle = -i\hbar^2 \omega \frac{2}{3} cos((E_0 - E_1)t/\hbar) \tag{19}$$

Finalmente, por Ehrenfest

$$\frac{\mathrm{d} \langle p \rangle}{\mathrm{d}t} = \hbar\omega \frac{2}{3} cos((E_0 - E_1)t/\hbar) \tag{20}$$

que se resuelve integrando en el tiempo

$$\langle p \rangle = (E_1 - E_0)\omega \frac{2}{3} sin((E_0 - E_1)t/\hbar) \tag{21}$$

Una manera mucho mas sencilla es usar el teorema de Ehrenfest para el valor esperado de p:

$$\langle \hat{p} \rangle = m \frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt}. \tag{22}$$

Los valores esperados de los operadores cuanticos no siempre siguen las leyes de Newton, en este caso $< x >, < p >$ se comportan clasicamente porque el potencial es cuadratico.

e. Calcular la relación de incertidumbre para un autoestado Φ_n.
Ayuda: Dado que es un sistema conservativo por el teorema del virial se tiene, $\langle \hat{T} \rangle = \langle \hat{V} \rangle = \frac{\hbar\omega}{4}(2n+1)$, $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$.
Δx es la incertidumbre en x: $(\Delta x)^2 = \langle x \rangle^2 - \langle x^2 \rangle$

Oscilador armónico:
$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$,
$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_0(x)\hat{x}\phi_1(x) = C$, donde C es una constante real.
Respuesta Sabemos que:

$$\Delta x_n^2 = \langle x \rangle_n^2 - \left\langle x^2 \right\rangle_n \tag{23}$$

$$\Delta p_n^2 = \langle p \rangle_n^2 - \left\langle p^2 \right\rangle_n \tag{24}$$

Como se trata de un autoestado del oscilador armónico:

$$\langle x \rangle_n = \langle p \rangle_n = 0 \tag{25}$$

$$\Delta x_n^2 \Delta p_n^2 = \left\langle x^2 \right\rangle_n \left\langle p^2 \right\rangle_n \tag{26}$$

Despejando los valores cuadráticos medios de la expresión de la energía potencial y cinética:

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{2\left\langle \hat{V} \right\rangle}{m\omega^2} \tag{27}$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = 2m\left\langle \hat{T} \right\rangle \tag{28}$$

Y utilizando el teorema del virial y cancelando:

$$\Delta x_n \Delta p_n = \hbar(2n+1) \tag{29}$$

Donde se ve que es mayor a $\hbar/2$ para todo n.

4) Se tiene una partícula de masa m en un pozo de potencial tridimensional con simetría esferica, que vale cero para $r < a$ y V_0 para $r > a$. Hallar la función de onda en las distintas regiones del espacio, suponiendo que la energía de la partícula es menor que V_0 y que el momento angular total de la particula es nulo.
No es necesario encontrar una forma explicita de las autoenergias, sólo encuentre la ecuación caracteristica
$\int_0^b sin(x)^2 dx = \frac{b - cos(b)sin(b)}{2}$
$\int_b^{\infty} e^{-x} dx = e^{-b}$

Solución; Dado que el potencial tiene simétria esferica, puede plantearse la solución separable $\psi(x,0) = R(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$, dónde Y son los armónicos esfericos. Además, se puede obtener una ecuación bastante más tranquila utilizando que, si definimos $u(r) = rR(r)$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + (V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}) = Eu(r) \tag{30}$$

Sabiendo que nos piden encontrar la solución con momento angular nulo, $l = 0$ por lo que la ecuación de $u(r)$ es la ecuación de Schrôdinger unidimensional, y las soluciones se pueden encontrar de la misma manera. La única diferencia es que $r > 0$ y existe una condición de contorno a cumplir además de la otorgada por el potencial $u(0) = 0$. Se definen entonces dos regiones $0 < r < a$ y $a < r$. En la primer región, el potencial vale cero por lo que se tiene la ecuación de un oscilador armónico y la solución más general es

$$u_I(r) = Acos(kr) + Bsin(kr) \tag{31}$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E \tag{32}$$

Utilizando que $u(0) = 0$, puede verse que $A = 0$ (es por esto que utilice la base de senos y cosenos y no la de exponenciales complejas). En la segunda región, y como $E < V_0$, la solución más general es

$$\begin{aligned} u_{II}(r) &= Ce^{Kr} + De^{-Kr} && (33)\\ K^2 &= \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) && (34)\end{aligned}$$

Dado que estamos buscando una solución normalizable, $C = 0$. Restan entonces determinar las constantes B y D y la energía E. Para eso, planteamos continuidad de la función y su derivada en $r = a$.

$$\begin{aligned} Bsin(ka) &= De^{-Ka} && (35)\\ Bkcos(ka) &= -KDe^{-Ka} && (36)\end{aligned}$$

Con la primer ecuación puede obtenerse que $D = Bsin(ka)e^{Ka}$. Como es caracteristico de los problemas de cuánticas, no podemos obtener B a partir de estas ecuaciones. En su lugar, y dividiendo ambas ecuaciones, se obtiene la siguiente ecuación para la energía:

$$tan(ka) = -\frac{k}{K} \qquad (37)$$

Esta ecuación permite obtener E númericamente o utilizando aproximaciones por lo que, a partir de aquí, podemos considerar a E como un dato a partir del cual expresar el coeficiente faltante, B. Para eso, utilizamos que la función de onda radial debe estar normalizada:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty drr^2|R(r)|^2 &= 1 && (38)\\ \int_0^\infty dr|u(r)|^2 &= 1 && (39)\\ \int_0^a dr|u_I(r)|^2 + \int_a^\infty dr|u_{II}(r)|^2 &= 1 && (40)\\ & && (41)\end{aligned}$$

Utilizando las fórmulas para las integrales dadas en el enunciado, se llega:

$$|B|^2(\frac{a}{2} - \frac{Cos(ka)Sin(ka)}{2k}) + |D|^2\frac{e^{-2ka}}{2K} = 1 \qquad (42)$$

Utilizando la expresión para D en función de B y la relación de dispersión, se llega a que:

$$|B|^2 = \frac{2}{a + \frac{sin^2(ka)}{K}(1 + \frac{K^2}{k^2})} \qquad (43)$$

Si V_0 fuera infinitamente grande, $sin^2(ka) = 0$ y recuperamos la normalización usual. Utilizando los coeficientes encontrados, la función de onda será entonces:

$$\begin{aligned} \psi_{I,II}(r,\theta,\phi) &= \frac{u_{I,II}(r)}{r}\frac{1}{\sqrt{4\pi}} && (44)\\ & && (45)\end{aligned}$$