

Problemas de Física 4 § Diferenciales Exactas

1. Diferenciales Exactas

Verificar si las siguientes son ecuaciones diferenciales exactas. De ser posible, encontrar la ecuación primitiva:

- (a) $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$
- (b) $3ydx + 2xdy = 0$
- (c) $(6x^5y^3 + 4x^3y^5)dx + (3x^6y^2 + 5x^4y^4)dy = 0$
- (d) $2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2}dy = 0$
- (e) $(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$

2. Factor de Integración

Encontrar el factor de integración y resolver las siguientes ecuaciones:

- (a) $x^2(y + 1)dx + y^2(x - 1)dy = 0$
- (b) $-ydx + 4xdy = x^2dy$
- (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)}$
- (d) $x^2 - 2y^2 + 2xyy' = 0$ (ayuda: verificar si es homogénea)

3. Propiedades de Estado

Si el diferencial de una función es exacto, se dice que la función es una *propiedad de estado*. Determinar si las siguientes son propiedades de estado:

- (a) La presión p dada por

$$p(v - b) = RT,$$

donde b y R son constantes.

- (b) El calor emitido por un sistema cuyo diferencial esta dado por

$$dq = f(T)dT + \frac{RT}{v}dv$$

- (c) La suma de dos propiedades.
- (d) El producto de dos propiedades.
- (e) El producto de una propiedad y un diferencial inexacto.
- (f) $dq \left(\frac{1}{T}\right)$.

4. Relaciones entre Derivadas Parciales

- (a) Demostrar que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}$
- (b) Demostrar que $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$
- (c) Demostrar que la ecuación anterior se cumple para la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Ayuda: $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{y}{x}$

§<http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/fisica4>

5. Derivadas Parciales en Termodinámica

- (a) Para la ecuación de estado de gases de Van der Waals

$$p = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{v^2}$$

determinar $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$, $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ y $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v$.

- (b) Repetir el problema para un gas ideal
 (c) Calcular el producto de los 3 diferenciales anteriores.

6. Coeficientes de expansión

El **coeficiente de expansión volumétrico** β se define por:

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p,$$

la **compresibilidad** κ se define:

$$\kappa = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T,$$

y el **coeficiente de expansión lineal** α es:

$$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_F.$$

- (a) Demostrar:

- i. $\beta_{g.i.} = \frac{1}{T}$
- ii. $\kappa_{g.i.} = \frac{1}{P}$
- iii. $\beta = 3\alpha$
- iv. $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\beta}{\kappa}$
- v. $\left(\frac{\partial \beta}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial \kappa}{\partial T}\right)_p$

- (b) Una esfera de bronce ($\alpha = 1.9 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) tiene un diámetro de 5.0 cm a 25 °C. Un anillo de acero ($\alpha = 1.1 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) tiene un diámetro de 4.995 cm a 25 °C. A qué temperatura puede empezar a pasar la esfera a través del anillo si:

- se calienta el anillo, pero no la esfera
- se calientan ambos a la misma temperatura

- (c) Un tacho de Aluminio de 40 l y 75 cm de altura, se llena hasta el tope con agua, cuando la temperatura es 20 °C. El tacho se coloca al sol, y la temperatura del agua se incrementa a 35 °C. Teniendo en cuenta que tanto el tacho como el agua expanden su volumen al aumentar la temperatura

- i. ¿El agua se derrama o deja de estar en el tope del tacho?
- ii. ¿Cómo cambia la presión en el fondo del tacho?

Buscar los datos en tablas.

7. Transformaciones de Legendre

Sea

$$df = g dx + h dy$$

un diferencial exacto, y $g = g(x, y)$ y $h = h(x, y)$, utilizar las transformaciones de Legendre para demostrar que

$$(a) \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_g = - \left(\frac{\partial h}{\partial g} \right)_y$$

$$(b) \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_x = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_y$$

$$(c) \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right)_x = - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_h$$

$$(d) \left(\frac{\partial x}{\partial h} \right)_g = \left(\frac{\partial y}{\partial g} \right)_h$$