FÍSICA 4 B

Segundo Cuatrimestre de 2022

Introducción Matemática

1. **Diferenciales Exactas**
   Verificar si las siguientes son ecuaciones diferenciales exactas. De ser posible, encontrar la ecuación primitiva:

   (a) $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$

   (b) $3ydx + 2xdy = 0$

   (c) $(6x^5y^3 + 4x^3y^5)dx + (3x^6y^2 + 5x^4y^4)dy = 0$

   (d) $2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2}dy = 0$

   (e) $(cosy + y\,cosx)dx + (sinx - x\,siny)dy = 0$

2. **Factor de Integración**
   Encontrar el factor de integración y resolver las siguientes ecuaciones:

   (a) $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$

   (b) $-y\,dx + 4xdy = x^2dy$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y}{x(y-3)}$

   (d) $x^2 - 2y^2 + 2xyy' = 0$ (ayuda: verificar si es homogénea)

3. **Propiedades de Estado**
   Si el diferencial de una función es exacto, se dice que la función es una *propiedad de estado*. Determinar si las siguientes son propiedades de estado:

   (a) La presión p dada por

   $$p(v - b) = RT,$$

   donde b y R son constantes.

   (b) El calor emitido por un sistema cuyo diferencial esta dado por

   $$dq = f(T)dT + \frac{RT}{v}dv$$

   (c) La suma de dos propiedades.

   (d) El producto de dos propiedades.

   (e) El producto de una propiedad y un diferencial inexacto.

   (f) $dq\left(\frac{1}{T}\right)$.

4. **Relaciones entre Derivadas Parciales**

   Sean x,y,z cantidades que satisfacen una relación funcional $f(x,y,z) = 0$.
   Sea w una función de cualquier par de variables x,y,z. Probar:

   $a)$ $\left.\dfrac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \dfrac{1}{\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_z}$

$b)\ \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_x \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y = -1$

$c)\ \left.\frac{\partial \omega}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_y = \left.\frac{\partial \omega}{\partial z}\right|_y$

$d)\ \left.\frac{\partial \omega}{\partial y}\right|_z = \left.\frac{\partial \omega}{\partial y}\right|_x + \left.\frac{\partial \omega}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z$

Demostrar que la ecuación b) se cumple para la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

(Ayuda: $\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = -\frac{y}{x}$)

:

5. **Derivadas Parciales en Termodinámica**

   (a) Para la ecuación de estado de gases de Van der Waals
   $$p = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{v^2}$$
   determinar $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$, $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ y $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v$.

   (b) Repetir el problema para un gas ideal

   (c) Calcular el producto de los 3 diferenciales anteriores.

6. **Transformaciones de Legendre** Sea

$$df = g\,dx + h\,dy$$

un diferencial exacto, y $g = g(x,y)$ y $h = h(x,y)$, utilizar las transformaciones de Legendre para demostrar que

   (a) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_g = -\left(\frac{\partial h}{\partial g}\right)_y$

   (b) $\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_y$

   (c) $\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_x = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_h$

   (d) $\left(\frac{\partial x}{\partial h}\right)_g = \left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_h$