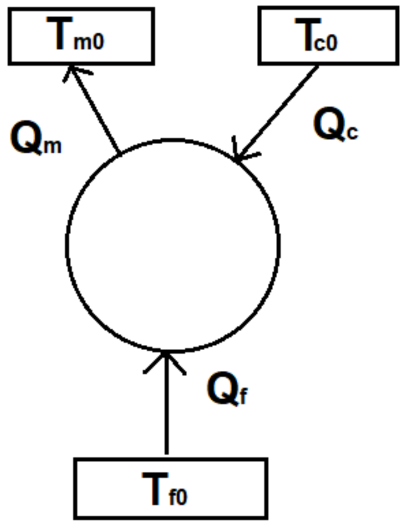
1) La siguiente maquina frigorífica opera entre tres fuentes de calor, donde $T_{f0} < T_{m0} < T_{c0}$. La máquina es reversible y su eficiencia se define como $COP = \frac{Q_f}{Q_c}$

   a) Suponiendo que las fuentes de calor son ideales, calcule la eficiencia de la maquina frigorífica. Compare con la eficiencia de una maquina frigorífica de Carnot que opera entre T_{f0} y T_{c0}

   b) Ahora asuma que las tres fuentes están hechas de la misma sustancia y tienen una capacidad calorífica C. Las fuentes intercambian calor cuasiestáticamente con la máquina. Si las tres fuentes terminan a la misma temperatura, calcule el valor de la misma. ¿Cuál es la eficiencia en este caso? ¿Cuánto varía la entropía del universo?



Resolución

a) Como la máquina es cíclica, debe cumplir que sus variables de estado son iguales al iniciar y al terminar un ciclo. Por lo tanto, ΔU=0 y ΔS=0 porque tanto la entropía como la energía interna son funciones de estado. Por lo tanto, la máquina debe cumplir:

$$\Delta U = Q - W = Q_f + Q_c - Q_m = 0$$

Todas las transferencias de calor son a temperatura constante, por lo tanto la variación de entropía se escribe como:

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_f}{T_{f0}} + \frac{Q_C}{T_{c0}} - \frac{Q_m}{T_{m0}} = 0$$

Dividiendo la primer ecuación por Q_c y reordenando se puede obtener:

$$COP = \frac{Q_m}{Q_c} - 1$$

De la ecuación de entropía se puede obtener:

$$COP = \frac{Q_m}{Q_c}\frac{T_{f0}}{T_{m0}} - \frac{T_{f0}}{T_{c0}}$$

Reemplazando la ecuación anterior se tiene:

$$COP = (COP + 1)\frac{T_{f0}}{T_{m0}} - \frac{T_{f0}}{T_{c0}}$$

$$COP = \frac{T_{f0}(T_{c0} - T_{m0})}{T_{c0}(T_{m0} - T_{f0})}$$

De la expresión obtenida se observa que la eficiencia se incrementa cuando Tm0 se acerca a Tf0, en el caso en que Tm0=Tf0 la eficiencia diverge. En el caso que Tm0=Tc0 la eficiencia es nula. Por lo tanto, para algunos valores de la temperatura Tm0 la eficiencia es mayor a la de Carnot, pero esto no viola ningún principio puesto que la maquina frigorífica de Carnot es la más eficiente entre dos fuentes de temperatura constante, condición que esta máquina no cumple.

b) Si las fuentes no son ideales, al intercambiar calor varían su temperatura de acuerdo a su capacidad calorífica. Planteando la primera ley en varios ciclos hasta alcanzar la temperatura final T, se obtien

$$\Delta U = Q - W = Q_f + Q_c - Q_m = C(T - T_f) + C(T - T_c) - C(T - T_m) = 0$$

$$T = \frac{T_f + T_c + T_m}{3}$$

De esta manera obtuvimos la temperatura final. Planteando la variación de entropía del universo obtenemos:

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{fuentes} + \Delta S_{máquina} = \Delta S_{fuentes} = \oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_f}^{T} \frac{CdT}{T} + \int_{T_c}^{T} \frac{CdT}{T} + \int_{T_m}^{T} \frac{CdT}{T}$$

$$\Delta S_{universo} = C \ln {}^{T}\!/_{T_f} + C \ln {}^{T}\!/_{T_c} + C \ln {}^{T}\!/_{T_m} = C \ln \frac{T^3}{T_f.T_m.T_c} = C \ln \frac{(T_f + T_c + T_m)^3}{27.T_f.T_m.T_c}$$

Por la definición de la eficiencia

$$COP = \frac{Q_f}{Q_c} = \frac{C(T - T_f)}{C(T - T_c)} = \frac{3T_c + 3T_m - 2T_f}{3T_f + 3T_m - 2T_C}$$