FÍSICA CONTEMPORÁNEA
2do cuatrimestre 2017
2 - MECÁNICA

Problema 1:
Encontrar la función $f(x)$ tal que la condición de extremal de la funcional

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}mv^2 + f(x)\right)\, dt$$

conduzca a:
a) la ley de Galileo de caída de los cuerpos.
b) la ley de movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza elástica.

Problema 2:
Sea $F(x, y, z)$ una función con derivadas primeras y segundas continuas para cualquiera de sus argumentos, y sea $y(x)$ cualquier función continuamente diferenciable para $a \leq x \leq b$ que satisface las condiciones de contorno

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B.$$

Probar entonces que la condición de extremal de la funcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

conduce a la ecuación de Euler–Lagrange

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Problema 3:
Escribir la lagrangiana de una partícula libre de acuerdo con un sistema de referencia que rota uniformemente con velocidad angular Ω. Por simplicidad, suponer que la partícula se mueve en un plano ortogonal al eje de rotación de dicho sistema.

Problema 4:
Considérese un cosmonauta de masa $m = 100\,kg$ unido a su nave por un cable de longitud $10\,m$ de manera que ambos describen alrededor de la Tierra órbitas circulares de radios que difieren en la longitud del cable. Para órbitas a unos $200\,km$ por encima de la superficie terrestre, estimar la tensión en el cable. Resolver el problema desde un sistema de referencia fijo a la nave.

Problema 5:
Una partícula de masa m y velocidad inicial $\mathbf{v}_1$ pasa de un semiespacio en que su energía potencial es igual a U_1 y entra en otro en el cual su energía potencial es igual a U_2. Determinar el cambio en la dirección del movimiento de la partícula. Mostrar que el resultado contradice la vieja hipótesis corpuscular (de Newton) acerca de la naturaleza de la luz (Sugerencia: ver la ley de refracción en algún libro de óptica, y recordar que la velocidad de la luz es, por ejemplo, menor en el agua que en el aire).

Problema 6:
Encontrar la ley de transformación de la lagrangiana y la acción cuando se pasa de un sistema de referencia inercial K a otro sistema inercial K' que se mueve con velocidad $\mathbf{V}$ respecto del primero. Expresar el resultado en términos de la masa total, de la posición del centro de masa respecto del sistema K', y del impulso respecto del mismo sistema.

Problema 7:
Indicar, justificando, las componentes del impulso $\mathbf{p}$ y del impulso angular $\mathbf{M}$ que se conservan en el movimiento de una partícula en los siguientes campos:
a) Campo plano homogéneo en el eje z.
b) Campo debido a dos cuerpos puntuales ubicados en el eje x.
c) Campo de un semiplano homogéneo.
d) Campo debido a un cono homogéneo.

Problema 8:
La energía potencial de un cuerpo de masa m que realiza un movimiento unidimensional está dada por una función $U(x)$ que tiene un único mínimo en el punto x_0. El cuerpo tiene una energía inicial E tal que $E = U(x_1) = U(x_2)$, con $x_1 < x_0 < x_2$. Calcular el período del movimiento del cuerpo. Considérese por separado el caso particular en que $U(x) = \alpha(x - x_0)^2$.

Problema 9:
Encontrar una expresión para el período de las oscilaciones de un péndulo plano en el campo gravitatorio terrestre, en función de su amplitud descripta por el ángulo máximo ϕ_0. Mostrar explícitamente que para $\phi_0 \ll 1$ el período no depende de la amplitud.

Problema 10:
Considérese una molécula triatómica simétrica y lineal (ABA). Bajo la hipótesis de que la energía potencial depende solamente de las distancias AB y BA (y del ángulo

entre los segmentos correspondientes) determinar las frecuencias de las vibraciones longitudinales. Ayuda: utilizar que el centro de masa está fijo, y mostrar que el cambio de variables $q_a = x_1 + x_3$, $q_s = x_1 - x_3$ (donde x_1 y x_3 son las posiciones de los átomos A) permite escribir la lagrangiana como la suma de las lagrangianas de dos osciladores independientes.

Problema 11:
Considérese un sistema formado por una partícula de masa M y n partículas de masa m. Reducir el problema al del movimiento de las n partículas, escribiendo la lagrangiana del sistema en forma análoga a lo hecho en el problema de dos cuerpos.

Problema 12:
Así como se demuestra la relación $t'/t = (l'/l)^{1-k/2}$ (donde k es el grado de homogeneidad de la energía potencial) entre los tiempos y las distancias de trayectorias semejantes, encontrar las relaciones análogas para las velocidades, las energías y los impulsos angulares en relación con las distancias.

Problema 13:
Encontrar la trayectoria de una partícula de masa m en un potencial central de la forma $U = \frac{1}{2}kr^2$.

Problema 14:
En el caso de una partícula en un campo central, la existencia de un "potencial centrífugo" que diverge cuando $r \to 0$ conduce a que no sea siempre posible alcanzar el centro. Mostrar cuáles son las condiciones sobre el potencial $U(r)$ tales que se pueda alcanzar el centro.

Problema 15:
Si se agrega una pequeña corrección δU a la energía potencial $U(r) = -\alpha/r$ la trayectoria de un movimiento ligado deja de ser cerrada y para cada vuelta el perihelio de la órbita se desplaza u ángulo $\delta\phi$. Determinar ese desplazamiento para $\delta U = \beta/r^2$ y para $\delta U = \gamma/r^3$. Sugerencia: reescribir la expresión para $\Delta\phi$ como una derivada, de manera de evitar integrales divergentes, y desarrollar el integrando en potencias de δU, conservando el término de orden más bajo.