Física Contemporánea 1

Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas.

Problema 1: Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para
a) Un oscilador armónico tridimensional (no necesariamente isótropo). Use coordenadas cartesianas.
b) Una partícula en un potencial central $U(r)$
c) Un trompo simétrico con un punto fijo en el campo gravitatorio terrestre.
d) En **a)**, resuelva las ecuaciones. En **b)** y **c)**, halle constantes de movimiento. Particularizando en **b)** a $U(r) = -k/r$, discuta las órbitas posibles. En todos los casos construya los diagramas de fases correspondientes.

Problema 2: Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas *cilíndricas* y en coordenadas *esféricas*. Construya los correspondientes diagramas de fases.

Problema 3: Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano la energía total?.

Problema 4: Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial generalizado $V = \frac{1}{r}(1 + \dot{r}^2)$, donde r es la distancia al origen. Encuentre los momentos generalizados p_r y p_θ y H. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva H?. ¿Es $H = E$?. Reduzca el problema para r a una ecuación diferencial de primer orden.

Problema 5: Considere un oscilador armónico unidimensional:
a) Halle su hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton, construya los diagramas de fases, halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad, discuta la existencia de movimientos de libración y rotación.
b) Halle la trasformación canónica de función generatriz: $F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo λ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q, P) = \omega P$ (ω: pulsación del oscilador).
c) Muestre que (Q, P) son variables de ángulo–acción. Halle el área encerrada por las curvas de E (energía) constante en el espacio de fases, y muestre que la curva que corresponde a un P dado encierra un área $2\pi P$.
d) Halle la función generatriz de tipo $F_2(P, q)$ que genera la misma transformación canónica $(q, p) \rightarrow (Q, P)$. ¿Qué relación hay entre F_1 y F_2?.

Problema 6: Considere un péndulo físico constituído por una barra de longitud l, que puede moverse en un plano vertical, con uno de sus extremos fijo (la barra gira libremente a su alrededor). El momento de inercia de la barra respecto al punto fijo es I. Hay gravedad.
a) Muestre que el hamiltoniano del sistema es $H = \frac{1}{2}I(p_\psi^2 - 2\alpha^2 cos\psi)$ donde ψ es el ángulo de la barra con la vertical, p_ψ su momento conjugado y α una constante a determinar.
b) Construya el correspondiente diagrama de fases; halle puntos de equilibrio y discuta su estabili-

dad; construya la curva separatriz correspondiente (halle su ecuación). Determine los movimientos de libración y rotación posibles y halle su período.
c) Muestre que el área encerrada por la separatriz es 16α. Deduzca que el máximo valor de la variable de acción para el movimiento de libración es $8\alpha/\pi$.

Problema 7: Considere los siguientes puntos:
a) Demuestre que $\frac{df}{dt} = [f, H] + \partial dft$. ¿Qué obtiene para $f = q_i$ ó $f = p_i$?. Si f no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que f sea constante de movimiento es que $[f, H] = 0$.
b) Muestre que si una coordenada q_i es cíclica, la transformación canónica de función generatriz $G = p_i$ es la transformación de simetría asociada al carácter cíclico de q_i. Observe que si $f =$ cte. de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al Hamiltoniano. Qué relación tiene esto con el teorema de Noether?.

Problema 8: Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\vec{B}$ en la dirección $\hat{z}$.
a) Elija $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ y resuelva el problema.
b) Demuestre que la transformación que sigue es canónica y líguela a una solución alternativa de la parte a. ($\omega = qB/mc$)

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1} sen q_1 + p_2)$$
$$p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1} cos q_1 - q_2)$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1} cos q_1 + q_2)$$
$$p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1} sen q_1 + p_2)$$