Momento generalizado, energía y simetrías en la formulación de Lagrange

Física Contemporánea 1 (2021). Prof. Hernán G Solari

19 de abril de 2021

1. El momento generalizado

A diferencia de la forma original de Newton, la mecánica de Lagrange se independiza del concepto de cuerpo en buena medida y también de las coordenadas cartesianas, al introducir el concepto de "grado de libertad" y utilizar coordenadas adaptadas al problema. De esta forma, al plantear una estructura matemática que abarca formas más amplias del lo que concebimos como sistema mecánico produce un rebasamiento de la mecánica newtoniana. La forma de las ecuaciones de Lagrange sugiere la manera en que se extiende el concepto de "momento lineal" que Newton introduce como el producto de la masa por la velocidad del cuerpo, $p_i = m_i v_i$ para producir la segunda ley $\frac{dp_i}{dt} = F_i$ donde el índice i corre en los cuerpos. Si llamamos $\{q_\alpha\}$ a las coordenadas generalizadas, ya habíamos introducido la fuerza generalizada como una proyección de la fuerza en las direcciones de movimiento compatibles con los vínculos que se obtenía por la relación:

$$-\frac{\partial \bar{V}}{\partial q_\alpha}$$

Si consideramos el langrangiano

$$\mathcal{L} = T - \bar{V}$$

y las ecuaciones de Newton

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha}$$

vemos que en el caso en que la energía cinética no depende de las coordenadas generalizadas (es decir que solo depende de las velocidades generalizadas) uno obtendría del lado derecho de ésta fórmula la fuerza generalizada antes vista, por lo que haríamos bien en llamar **momento generalizado** a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\alpha} \equiv \bar{\mathbf{p}}_\alpha$$

No suele hacerse, pero para ser consistentes deberíamos corregirnos y llamar fuerza generalizada a $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \equiv \bar{F}_\alpha$, usualmente no se hace. Si tal cosa hiciéramos, obtendríamos la misma semántica que en Newton

$$\frac{d}{dt}\bar{p}_\alpha = \bar{F}_\alpha$$

La ecuación de Lagrange es más general que la de Newton y permite incorporar otras fuerzas, no solo aquellas que derivan de un gradiente. Por muchos años, desde los Principia de Newton (1687) hasta comienzos del siglo XIX solo se habían reconocido fuerzas que dependían de potenciales los cuales a su vez eran funciones de las distancias entre los cuerpos (se las llama fuerzas centrales y ya las veremos) (el trabajo de Lagrange de formulación del lagrangiano se realiza en Berlín entre 1772 y 1788).

Ejemplos:

- En el caso del péndulo tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{ML^2}{2}(\dot{\theta})^2 - MgL(1-\cos(\theta)) \\ \bar{p} &= ML^2\dot{\theta} \\ \bar{F} &= -MgL\sin(\theta) \end{aligned}$$

- En el alambre rotante

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= ((wr)^2 + \dot{r}^2)\frac{m}{2} \\ \bar{p} &= m\dot{r} \\ \bar{F} &= mw^2 r \end{aligned}$$

- En el péndulo cuyo anclaje desliza

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m_1}{2}\dot{q}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\left(L\dot{\theta}\sin(\theta)\right)^2 + \left(\dot{q} + L\dot{\theta}\cos(\theta)\right)^2\right) + m_2 gL\cos(\theta) \\ p_q &= m_1\dot{q} + m_2\left(\dot{q} + L\dot{\theta}\cos(\theta)\right) \\ p_\theta &= m_2 L\dot{\theta} + m_2\left(\dot{q}L\cos(\theta)\right) \\ F_q &= 0 \\ F_\theta &= -m_2 Lg\sin(\theta) - m_2 L\dot{q}\dot{\theta}\sin(\theta) \end{aligned}$$

  donde introdujimos la notación habitual para describir el momento asociado a la coordenada generalizada.

2. De la integración por cuadraturas a la conservación del Hamiltoniano

El Lagrangiano es una función de las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y el tiempo. Conocemos, o al menos hemos nombrado, a sus derivadas respecto a coordenadas y velocidades, falta conocer la derivada respecto del tiempo. Lo que vamos a buscar es como cambia el valor del Lagrangiano siguiendo la trayectoria solución de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} = \sum_{\alpha} \left(p_\alpha \ddot{q}_\alpha + \bar{F}_\alpha \dot{q}_\alpha \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{1}$$

resultado que obtenemos luego de usar las definiciones de momento y fuerza generalizadas dadas antes. Observamos que es posible, a lo mejor conveniente ... exploremos, escribir

$$\frac{d\left(p_\alpha \dot{q}_\alpha\right)}{dt} - \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha = p_\alpha \ddot{q}_\alpha$$

Luego, podemos escribir (1) en la forma

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} = \sum_{\alpha} \left(\frac{d\left(p_\alpha \dot{q}_\alpha\right)}{dt} - \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha + \bar{F}_\alpha \dot{q}_\alpha \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

pero, $\dot{p}_\alpha = \bar{F}_\alpha$ por lo que tenemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} = \sum_{\alpha} \frac{d\left(p_\alpha \dot{q}_\alpha\right)}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

o lo que es lo mismo

$$-\frac{d}{dt}\mathcal{L} + \sum_{\alpha} \frac{d\left(p_\alpha \dot{q}_\alpha\right)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Si definimos

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha} \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha - \mathcal{L}$$

tenemos

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Llamamos a la función $\mathcal{H}$ el **Hamiltoniano** del problema, para escribirlo explícitamente hace falta saber escribir $\{\dot{q}_\alpha\}$ como función de $\{p_\alpha, q_\alpha, t\}$, de tal forma que $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{p_\alpha\}, \{q_\alpha\}, t)$. Podemos enunciar: *Si el lagrangiano del problema no depende explíticamente del tiempo, el hamiltoniano del problema es constante en el tiempo a lo largo de las trayectorias. Se dice que es "una constante de movimiento".*

2.1. Lagrangianos cuadráticos en las velocidades generalizadas.

Para arribar a Lagrange habíamos propuesto que las coordenadas de los cuerpos eran funciones de las coordenadas generalizadas y el tiempo

$$x_i = X_i(\{q_\alpha\}, t)$$

en tal caso, las velocidades son:

$$v_i = \dot{x}_i = \sum_\alpha \frac{\partial X_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial X_i}{\partial t}$$

y las energías cinéticas resultan (usando la convención ya descripta para la notación de las masas según las coordenadas cartesianas)

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\sum_\alpha \frac{\partial X_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial X_i}{\partial t}\right)^2$$

por lo tanto

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i \left(m_i \sum_\beta \frac{\partial X_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial X_i}{\partial t}\right)\frac{\partial X_i}{\partial q_\alpha} \equiv \sum_\beta M_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta + p^*_\alpha$$

donde escribí una matriz de masa generalizada

$$M_{\alpha\beta} = \sum_i \left(m_i \frac{\partial X_i}{\partial q_\beta}\frac{\partial X_i}{\partial q_\alpha}\right)$$

y una contribución más al momento que puede depender de las coordenadas generalizadas pero no de las velocidades generalizadas

$$p^*_\alpha = \sum_i \left(m_i \frac{\partial X_i}{\partial t}\frac{\partial X_i}{\partial q_\alpha}\right)$$

Con esta notación, la energía cinética se reescribe como

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\sum_\alpha \frac{\partial X_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial X_i}{\partial t}\right)\left(\sum_\beta \frac{\partial X_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial X_i}{\partial t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_\beta p_\beta \dot{q}_\beta + \frac{1}{2}\sum_i \left[m_i \left(\sum_\alpha \frac{\partial X_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial X_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial X_i}{\partial t}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_\beta p_\beta \dot{q}_\beta + \sum_\alpha p^*_\alpha \dot{q}_\alpha + \sum_i \left(m_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial t}\right)^2\right)\right]
\end{aligned}$$

Observamos en este caso que

$$\sum_{\alpha} p_\alpha \dot{q}_\alpha = \sum_{\beta\alpha} M_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha} p^*_\alpha \dot{q}_\alpha$$

Recordando que

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha} \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha - \mathcal{L}$$

y $\mathcal{L} = T - \bar{V}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha} p_\alpha \dot{q}_\alpha - \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial t}\right)^2 - \sum_{\alpha} p^*_\alpha \dot{q}_\alpha\right) + \bar{V} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha} (p_\alpha \dot{q}_\alpha - p^*_\alpha \dot{q}_\alpha) - \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial t}\right)^2\right) + \bar{V} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha} (M_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta) - \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial t}\right)^2\right) + \bar{V}
\end{aligned}$$

En el caso en que la energía cinética fuera cuadrática en el tiempo y el Lagrangiano no dependiera explícitamente del tiempo y la transformación de coordenadas no dependiera explícitamente del tiempo, el hamiltoniano coincidiría con la energía mecánica y la energía mecánica sería constante en las trayectorias. Este es el caso de los ejemplos anteriores con péndulos. En el caso del alambre que rota, el lagrangiano no depende del tiempo pero la transformación de coordenadas si lo hace. En este caso hay una constante de movimiento que es el Hamiltoniano pero no coincide con la energía, la energía es $E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + (rw)^2$ pero el hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 - (rw)^2$ y ésta era la constante de movimiento que se obtenía por cuadraturas.

3. Simetrías continuas y el teorema de Noether

Si tenemos un objeto y le aplicamos una transformación (operación) que hace que lo que "vemos" sea igual al objeto decimos que el objeto es simétrico (o muestra simetría) respecto de la transformación. Lo más fácil de ver son objetos geométricos simétricos. Un triángulo isósceles tiene simetría de reflexión con respecto a la bisectriz del ángulo distinto, un lado y otro en los que queda dividido el triángulo se puede intercambiar punto a punto y nos queda el mismo triángulo. Un cuadrado tiene más operaciones de simetría, hay dos reflexiones que lo dejan igual (se dice invariante). Reflejar por una diagonal y reflejar por la linea que corta por la mitad de un lado a la mitad de un lado y corta por la mitad el lado opuesto. Estas dos reflexiones se pueden aplicar una después de la otra, hagan el ejercicio y verán que el resultado es otra operación de simetría del cuadrado: una rotación en $\pi/2$. Sucesivas aplicaciones de estas reflexiones nos dan todas las simetrías del cuadrado. Esto es cierto en todos los polígonos regulares de número par de lados. Nos llevamos la moraleja de que la composición (aplicación sucesiva) de operaciones de simetría nos da una simetría. También hay una operación inversa para cada operación de simetría. Por inversa queremos decir una operación que “deshace” otra y como resultado de la aplicación sucesiva de las dos es lo mismo que no haber hecho nada, o sea, la operación identidad. Finalmente si aplicamos tres operaciones consecutivamente tenemos una operación de simetría que la puedo frasear de dos maneras distintas (además de la dicha): el resultado de la acción de la tercera y segunda operación sobre el objeto producto de la acción de la primera operación es el mismo que el resultado de la acción de la tercera operación sobre el resultado de la acción compuesta de la primera y la segunda. En sínbolos, sea G el conjunto de las operaciones de simetría, $f, g, h \in G$ operaciones de simetría, y $e \in G$ la operación identidad que nada cambia. Se tienen las relaciones

$$\begin{aligned} e &\in G \\ f \circ g &\in G \\ \forall f\, \exists f^{-1} &\;/\; f^{-1} \circ f = e \\ f \circ (g \circ h) &= (f \circ g) \circ h \end{aligned}$$

Se dice entonces que las operaciones de simetría conforman un grupo de operaciones cuya forma abstracta está dada por la ley de composición, ϕ,

$$f \circ g = \phi(f, g)$$

Hay simetrías que admiten operaciones continuas y no solo discretas como las de las figuras geométricas regulares. Si tenemos una esfera, podemos rotarla alrededor de cualquier eje que pase por su centro en cualquier cantidad, grande o pequeña y aún infinitesimal y seguiremos viendo nuestra perfecta esfera. Son estas simetrías continuas las que interesaron a Amalie Emmy Noether[1]El objeto que estudia Noether es el lagrangiano y las transformaciones son transformaciones continuas de las coordenadas, que transforman un sistema de coordenadas en otro equivalente y dependen de un parámetro continuo. Podríamos escribir entonces

$$\begin{aligned} \{\tilde{q}_s\} &= Q(\{q\}, s) \\ \left\{\tilde{q}_{\phi(r,s)}\right\} &= Q(\{\tilde{q}_s\}, r) \\ &= Q(Q(\{q\}, s), r) \\ &= Q(\{q\}, \phi(r, s)) \end{aligned}$$

Si haciociamos con 0 el elemento neutro (identidad) de las transformaciones y tenemos las transformaciones inversas, $\bar{s}$, tal que $\phi(\bar{s}, s) = 0$, podemos escribir $\{q\} = Q(\{\tilde{q}_s, \bar{s}\})$ Podríamos entonces escribir el Lagrangiano en las coordenadas $\{\tilde{q}_s\}$ como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(Q(\{\tilde{q}\}, \bar{s}), \dot{Q}(\{\tilde{q}\}, \bar{s}), t) \equiv \tilde{\mathcal{L}}(Q, \dot{Q}, t; \bar{s})$$

[1]Matemática alemana que enseño por muchos años (hasta su muerte en 1935) en el Bryn Mawr College de Pennsylvania (cerca de Philadelphia). Un college (universidad) para mujeres vecino del Haverford college (el colegio de varones) a donde las familias pudientes de la zona (Philadelphia y sur de New Jersey) enviaban a sus hijos, según el género.

y diríamos que el **Lagrangiano es simétrico** si se cumple

$$\tilde{\mathcal{L}}(Q, \dot{Q}, t; \bar{s}) = \tilde{\mathcal{L}}(Q, \dot{Q}, t)$$

es decir que no aparece s en la expresión de $\tilde{\mathcal{L}}$. Del hecho la transformación $Q(q, 0) = q$ es la identidad tenemos que $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$. Si esto ocurre, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \bar{s}} &= 0 \\
0 &= \sum_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_\alpha} \frac{\partial Q}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \bar{s}} \right) \\
&= \sum_\alpha \left(\frac{dP_\alpha}{dt} \frac{\partial Q}{\partial \bar{s}} + P_\alpha \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \bar{s}} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\sum_\alpha P_\alpha \frac{\partial Q}{\partial \bar{s}} \right)
\end{aligned}$$

De donde, $\sum_\alpha P_\alpha \frac{\partial Q}{\partial \bar{s}}$ es constante de movimiento. Y este es el contenido del teorema de Noether: si el Lagrangiano tiene una simetría continua, hay una constante de movimiento asociada que se obtiene de la manera indicada. El ejemplo que tenemos a mano es el ejemplo 3 en la nota de Lagrange. Allí es posible desplazar todo el sistema paralelo al cable de donde pende el péndulo, es decir, la transformación $q_a = q + a$ no cambia en nada la física del problema, lo cual se verifica en el lagrangiano ya que solo depende de $\dot{q} = \dot{q}_a$ y el resultado inmediato es que hay una constante de movimiento que sería $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = p_q$ cosa que ya vimos.