Nota sobre fuerzas de vínculo y ecuaciones de Lagrange

(Física contemporanea 1, Solari, 2021)

Consideramos N cuerpos y sus $3N$ coordenadas cartesianas, x_i, a cada coordenada le corresponde una masa m_i que es la masa del cuerpo a la que la coordenada refiere. Tenemos además M condiciones de vínculo en la forma

$$h_v(\{x_i\},t) = a_v,\; v = 1 \ldots M$$

y podemos considerar $a_k = 0$ cuando se satisface la condición de vínculo. Los grados de libertad están representados por las coordenadas generalizadas

$$q_i,\; i = 1 \ldots 3N - M$$

si consideramos el conjunto formado por $\{q_i\} \cup \{a_v\}$reclamamos que sea localmente equivalente a las coordenadas carteasianas, es decir que exista la transformación

$$X_i(\{q\} \cup \{a\},t) = x_i \tag{1}$$

A tiempo fijo, un desplazamiento de la condición inicial compatible con los vínculos está dado por

$$h_v(\{x_i + \delta_i\},t) = a_v$$

y para desplazamientos infinitesimales es lo mismo que pedir

$$\sum_i \frac{\partial h_v}{\partial x_i}\delta_i = 0 = \sum_{ik} \frac{\partial h_v}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

Reconocemos entonces a

$$\left\{\frac{\partial h_v}{\partial x_i}\right\}$$

como las componentes del vector normal a la superficie determinada por la condición de vínculo k. Por el contrario, un desplazamiento que cambia el valor de a_v es

$$\delta a_v = \sum_i \frac{\partial h_v}{\partial x_i}\delta'_i$$

y tienen proyección no nula en la normal, puesto que la transformación 1 es invertible, tenemos

$$\begin{aligned} dX_i &= dx_i = \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial q_k}dq_k + \sum_v \frac{\partial X_i}{\partial a_v}da_v + \frac{\partial X_i}{\partial t}dt \\ \delta X_i &= \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_v \frac{\partial X_i}{\partial a_v}\delta a_v \end{aligned} \tag{2}$$

Podemos saber más sobre δa_k ya que

$$\delta a_v = \sum_{im}\left(\frac{\partial h_v}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial a_m}\delta a_m\right) + \sum_{im}\left(\frac{\partial h_v}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial q_m}\delta q_m\right)$$

La segunda suma es cero porque son todos los movimientos virtuales que no alteran los vínculos. La primera suma implica que

$$\sum_i \left(\frac{\partial h_v}{\partial x_i} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} \right) = \delta_{vm} \tag{3}$$

donde δ_{km} es la delta de Kronecker.

Igual que como cuando comenzamos la derivación de las ecuaciones de Lagrange, escribimos

$$\sum_i \left(\frac{dp_i}{dt} - F_i - F_i' \right) \delta X_i = 0$$

Con F_i la fuerza expresada en términos de posición y coordenada que corresponde a la coordenada i y F_i' la contribución de los vínculos. Usando 2 llegamos rápidamente a:

$$\sum_{ik} \left(\frac{dp_i}{dt} - F_i \right) \frac{\partial X_i}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_v \sum_i \left(\frac{dp_i}{dt} - F_i - F_i' \right) \frac{\partial X_i}{\partial a_v} \delta a_v = 0 \tag{4}$$

Pero todos los desplazamientos son independientes. Del primer grupo sabemos que obtenemos las ecuaciones de Lagrange, del segundo grupo obtenemos las fuerzas de vínculo.

Ecuaciones de Lagrange El punto de partida es entonces

$$\sum_i \left(\frac{dp_i}{dt} - F_i \right) \frac{\partial X_i}{\partial q_k} = 0$$

y debemos transformarlo reconociendo sus términos. El más sencillo es

$$-\sum_i F_i \frac{\partial X_i}{\partial q_k} = -\tilde{F}_k$$

la fuerza generalizada, que en caso de provenir F_i de un potencial, simplemente es:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\{q\}) &= V(\{X(q)\}) \\ \tilde{F}_k &= -\sum_i \frac{\partial V}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_k} \end{aligned}$$

Es decir que se reescribe el potencial en termino de las coordenadas generalizadas y se deriva parcialmente respecto de ellas para obtener la fuerza generalizada.

El término cinético lleva más elaboración. Es necesario tener en cuenta que la transformación propuesta es geométrica. Por ejemplo, en un péndulo escribimos

$$(x, y) = L(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

una transformación donde no interviene la velocidad. Si escribimos la velocidad en este ejemplo

$$(\dot{x}, \dot{y}) = L\dot{\theta}(-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

que depende linealmente de la velocidad generalizada $\dot{\theta}$. En este caso podemos ver que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial\theta} = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y})}{\partial\dot{\theta}} = L(-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

De la misma manera y de forma general

$$\dot{X}_i = \frac{dX_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial X_i}{\partial t}$$

y

$$\frac{\partial X_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial \dot{q}_k} \tag{5}$$

La aceleración se escribe:

$$\ddot{X}_i = \frac{d^2X_i}{dt^2} = \sum_{kl}\left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l\right) + 2\sum_k \frac{\partial^2 X_i}{\partial t \partial q_k} + \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2}$$

dado que $\{q, \dot{q}, t\}$ son variables independientes. Otra expresión que precisamos es:

$$\frac{d}{dq_k}\left(\dot{X}_i\right) = \sum_l \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_l \partial q_k}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 X_i}{\partial t \partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X_i}{\partial q_k}\right) \tag{6}$$

Es decir que la derivada temporal y parcial respecto a la coordenada generalizada se pueden intercambiar.

Ahora transformamos la cantidad

$$Esto = \sum_i \frac{dp_i}{dt}\frac{\partial X_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i \frac{\partial X_i}{\partial q_k}\right) - \sum_i p_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X_i}{\partial q_k}\right)$$

utilizando la expresión 5 y la expresión 6

$$Esto = \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_i p_i \left(\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial q_k}\right)$$

Si formamos la expresión correspondiente a la energía cinética

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\dot{X_i})^2$$

la expresión anterior pasa a ser

$$Esto = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_k}\right)$$

Por lo tanto, considerando fuerzas que derivan de un potencial nos queda la ecuación

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_k} = 0$$

y si formamos el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \tilde{T} - \tilde{V}$$

llegamos a la expresión de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

Ejemplo 1: El péndulo En el péndulo teníamos que la posición de la masa en término de las coordenadas generalizadas θ y del parámetro asociado al vínculo (la longitud del hilo, L) son:

$$(x, y) = L(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

y al derivar respecto del tiempo la velocidad es:

$$v = L\dot{\theta}(-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

Luego, si M es la masa del péndulo, la energía cinética es: $T = \frac{ML^2}{2}(\dot{\theta})^2$. El potencial es: $V(x) = Mg(L - x)$ (la gravedad es $(g, 0)$ lo que fija la orientación del eje $\hat{x}$. Luego $\bar{V}(\theta) = MgL(1 - \cos(\theta)) = V(x(\theta, L))$. Las ecuaciones de movimiento resultantes son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{ML^2}{2}(\dot{\theta})^2 - MgL(1 - \cos(\theta)) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \\
ML^2\ddot{\theta} + MgL\sin(\theta) &= 0
\end{aligned}$$

Multiplicando por $\dot{\theta}$ y reconociendo $\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{dt}$y $\theta \sin(\theta) \dot{=} -\frac{d\cos(\theta)}{dt}$tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M(L\dot{\theta})^2 + ML\cos(\theta)\right) = 0$$

o lo que es lo mismo, $\frac{1}{2}M(L\dot{\theta})^2 - ML\cos(\theta) = E - MgL$ donde $E = T + \bar{V}$ es una constante que reconocemos como la energía. Este tipo de integración, habitual de la mecánica, se denomina “por cuadraturas”.

Ejemplo 2 (Problema 7 de la guía) En una varilla que se mueve con velocidad angular w donde está engarzada una masa, m, que puede deslizar sobre ella. Hacemos el movimiento perpendicular a la gravedad para facilitar las cosas.

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= r(\cos(wt+a), \sin(wt+a)) \\
v &= rw(-\sin(wt+a), \cos(wt+a)) + \dot{r}(\cos(wt+a), \sin(wt+a)) \\
\frac{dv}{dt} &= (\ddot{r} - rw^2)(\cos(wt+a), \sin(wt+a)) + 2\dot{r}w(-\sin(wt+a), \cos(wt+a)) \\
\mathcal{L} &= ((wr)^2 + \dot{r}^2)\frac{m}{2}
\end{aligned}
$$

Ecuación de movimiento

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} = mw^2 r$$

Para el futuro, constante de movimiento $H = \frac{m}{2}(-(wr)^2 + \dot{r}^2)$. ¿Cuál será el movimiento resultante? Despejamos

$$\dot{r} = \pm\sqrt{(2H_0/m) + w^2 r^2)}$$

Aquí el valor H_0 es el valor inicial de la constante, el cual puede ser positivo o negativo, pero siempre debe ser $H_0 + \frac{m}{2}(wr_0)^2 \geq 0$.
El sistema

$$\ddot{r} = w^2 r$$

es lineal y como tal su solución es $r = A\exp(wt) + B\exp(-wt)$ donde $A + B = r_0$ y $w(A - B) = \dot{r}_0$. Si $A > B$ (velocidad radial inicial positiva) el radio siempre crece. Si $A < B$ el radio comienza decreciendo hasta que los dos sumandos se igualan, la velocidad se hace cero y el radio comienza a decrecer. La constante $A \geq 0$ porque de lo contrario el radio se hace negativo y queda fuera de las soluciones admisibles. Por otro lado, $a = 0$ corresponde a una condición inicial $r = B, \dot{r} = -wB$y $H_0 = \frac{m}{2}\left(-(wB)^2 + (wb)^2\right) = 0$ En ese caso extremo, la masa se va al centro.
No hemos usado la forma explícita del vínculo. El vínculo fija el ángulo en el tiempo, lo podemos escribir como

$$
\begin{aligned}
h(x,y) = \arctan 2(x,y) - wt &= a \\
\arctan 2(x,y) &= \begin{cases} \arctan(y/x) & x > 0 \\ sign(y)\pi + \arctan(y/x) & x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Aprovechamos para ver la dirección de la fuerza de vínculo

$$F_v = \lambda\,(\frac{-y}{x^2}, \frac{1}{x})\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \lambda\,(-y, x)\frac{1}{y^2 + x^2}$$

que es un vector normal al alambre ya que $(x, y) \cdot (y, -x) = xy - yx = 0$. La ecuación de Newton en este caso hubiera sido

$$m(\ddot{x}, \ddot{y}) = \lambda\,(y, -x)\frac{1}{y^2 + x^2}$$

Los desplazamiento virtuales serían $\delta\,(x, y)/\sqrt{x^2 + y^2}$ y multiplicando por la ecuación de Newton obtenemos

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = 0$$

Para resolver la ecuación tendríamos que usar la expresión de las coordenadas y aceleraciones en función de las variables (r, θ)

$$\begin{aligned} (x, y) &= r(\cos(wt + a), \sin(wt + a)) \\ (\ddot{x}, \ddot{y}) &= (\ddot{r} - rw^2)(\cos(wt + a), \sin(wt + a)) + 2\dot{r}w(-\sin(wt + a), \cos(wt + a)) \end{aligned}$$

y haciendo el producto escalar entre las dos obtener

$$(\ddot{r} - rw^2)mr = 0$$

Ecuación que tiene como soluciones $r = 0$ y las soluciones de $\ddot{r} - w^2 r = 0$ que son las exponenciales que ya discutimos. Lo que nos ofrece Lagrange es la solución sistemática de esta cuestión.

Ejemplo 3 (Problema 9 de la guía) (dibujo on-line) Tenemos dos grado de libertad. La masa m_1 se desliza por un cable horizontal, por lo que su posición está dada por un valor de x_1 sobre ese cable medido desde algún punto de referencia. Su altura $z_1 = 0$ será la referencia en la otra coordenada. La masa m_2 se puede hallar con la instrucción, vaya hasta m_1 siga el hilo que desciende formando un ángulo θ respecto de la vertical una longitud L

$$\begin{aligned} (x, z)_1 &= (q, 0) \\ (x.z)_2 &= (q, 0) + L(\sin(\theta), \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Solo la segunda masa contribuye al potencial, por lo que tenemos $V(z) = -m_2 gz$ (z mide la distancia al cable del que cuelga el péndulo, el eje tiene la dirección de la gravedad), $\bar{V}(\theta) = -m_2 gL\cos(\theta)$. Las velocidades son:

$$\begin{aligned} v_1 &= (\dot{q}, 0) \\ v_2 &= (\dot{q} + L\dot{\theta}\cos(\theta), -L\dot{\theta}\sin(\theta)) \end{aligned}$$

El lagrangiano se lee:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\dot{q}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\left(L\dot{\theta}\sin(\theta)\right)^2 + \left(\dot{q} + L\dot{\theta}\cos(\theta)\right)^2\right) + m_2 g L\cos(\theta)$$

y ahora tenemos dos ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(m_1\dot{q} + m_2\dot{q} + L\dot{\theta}\cos(\theta)\right) &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(m_2 L^2\dot{\theta} + m_2 L\dot{q}\cos(\theta)\right) &= -m_2 g L\sin(\theta) - m_2\dot{q}L\dot{\theta}\sin(\theta)
\end{aligned}$$

La primera ecuación da una constante de movimiento que tiene que ver con la posibilidad de trasladar este sistema rígidamente en la dirección x, es el momento lineal total en esa dirección. Esa ecuación establece que

$$\dot{q} = -\frac{L\dot{\theta}\cos(\theta)}{m_1 + m_2} + P$$

Relación que puedo usar en la segunda ecuación para obtener

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(m_2 L^2\dot{\theta} + m_2 L\left(-\frac{L\dot{\theta}\cos(\theta)}{m_1 + m_2} + P\right)\cos(\theta)\right) = \\
&\qquad = -m_2 g L\sin(\theta) - m_2\left(-\frac{L\dot{\theta}\cos(\theta)}{m_1 + m_2} + P\right)L\dot{\theta}\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación podríamos apelar al método de cuadraturas, pero terminaríamos en un «gran problema» de integración. Si nos restringimos a pequeñas oscilaciones donde podemos reemplazar $(\cos(\theta), \sin(\theta)) \approx (1, \theta)$ la ecuación se torna lineal (en la jerga, «la linealizamos») y se puede resolver por el método de las exponenciales o por suma de senos y cosenos. (Hay que recordar aquí la relación de Euler $\exp(It) = \cos(t) + I\sin(t)$). El álgebra final (y repasar los posibles errores de álgebra de la cuenta anterior) es un ejercicio.

Fuerzas de vínculos Volvemos a la ecuación 4 de la que obtenemos la parte de fuerza de los vínculos

$$\sum_i \left(\frac{dp_i}{dt} - F_i\right)\frac{\partial X_i}{\partial a_v} = \sum_i F_i'\frac{\partial X_i}{\partial a_v} = \sum_{im}\left(\lambda_m\frac{\partial h_m}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial a_v}\right) = \lambda_v$$

dado que la fuerza de vínculo está dada en la dirección de la normal, $F_i' = \sum_v \lambda_v \frac{\partial h_v}{\partial x_i}$ y usando 3.

Pero si la fuerza $F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ es decir que es conservativa y viene del gradiente de un potencial, V. Definimos

$$\tilde{V}(q, a) = V(\{X_i(q, a)\})$$

y tenemos

$$-\sum_i F_i \frac{\partial X_i}{\partial a_v} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial a_v}$$

Mientras que

$$\sum_i \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial a_v} = \sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial a_v}$$

con

$$v_i = \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial X_i}{\partial t}$$

Recordando que coordenadas y velocidades se pueden cambiar independientemente unas de otras, es decir que $\dot{q}_i$no debe ser considerado una función de las coordenadas

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_m} = \sum_k \frac{\partial^2 X_i}{\partial q_k \partial a_m} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 X_i}{\partial t \partial a_m} = \frac{d}{dt} \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial a_m} \tag{7}$$

y reescribiendo como en Lagrange

$$\sum_i \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial a_k} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \frac{\partial X_i}{\partial a_k} \right) - \sum_i p_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial X_i}{\partial a_k} \right)$$

usando 7para obtener

$$\sum_i \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial a_k} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \frac{\partial X_i}{\partial a_k} \right) - \sum_i p_i \frac{\partial v_i}{\partial a_k}$$

tenemos que esta última es

$$-\sum_i p_i \frac{\partial v_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial T}{\partial a_k} \tag{8}$$

Tenemos todos los elementos ahora para evaluar

$$\sum_i \left(\frac{dp_i}{dt} - F_i \right) \frac{\partial X_i}{\partial a_v} = -\frac{\partial T}{\partial a_k} + \frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \frac{\partial X_i}{\partial a_k} \right) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial a_v} = \lambda_v$$

Luego reconocemos que el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q\}, \{\dot{q}\}, \{a\}, t)$$

y obtenemos λ como

$$\begin{aligned} \lambda_v &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_v} + \frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \frac{\partial X_i}{\partial a_k} \right) \\ F_i^v &= \lambda_v \left(\frac{\partial h_v}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

Ecuación que todo ingeniero debe saber, pues da las demandas sobre los vínculos.

Es importante hacer notar que si en lugar de escribir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q, \dot{a}, t)$$

hubiéramos generado una energía cinética permitiendo el cambio de los vínculos en el tiempo, obteniendo

$$\tilde{v}_i = \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_v \frac{\partial X_i}{\partial a_v} \dot{a}_v + \frac{\partial X_i}{\partial t}$$

y

$$\tilde{T}(q, \dot{q}, a, \dot{a}, t) = \sum_i \frac{m_i}{2} \tilde{v}_i^2$$

podemos verificar una vez más que (usando la independencia de la velocidad respecto de la coordenada)

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \dot{a}_v} = \frac{\partial X_i}{\partial a_v}$$

y por lo tanto la ecuación 8 se transforma en

$$\begin{aligned} \lambda_v &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_v} + \frac{d}{dt}\left(\left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{a}_v} \right]_{\{a_v = \dot{a}_v = 0\}} \right) \\ \tilde{\mathcal{L}} &= \tilde{T} - \tilde{V} \\ \mathcal{L} &= \tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, a, 0, t) \end{aligned}$$

Ejemplo 2 (cont.) Condición de vínculo

$$\arctan(\frac{y}{x}) - wt = a$$

dirección de la fuerza de vínculo (mejor dicho, el vector gradiente del vínculo)

$$(y, -x)/r^2 = (-\sin(wt + a), \cos(wt + a))/r$$

y también, recordando que

$$mv = mrw(-\sin(wt + a), \cos(wt + a)) + m\dot{r}(\cos(wt + a), \sin(wt + a))$$

$$p \cdot \frac{\partial}{\partial a} r(\cos(wt + a), \sin(wt + a)) = mr^2 w = \lambda$$

$$2m\dot{r}w(-\sin(wt + a), \cos(wt + a)) = F$$

que podemos verificar es la proyección de la masa por la aceleración tangencial.