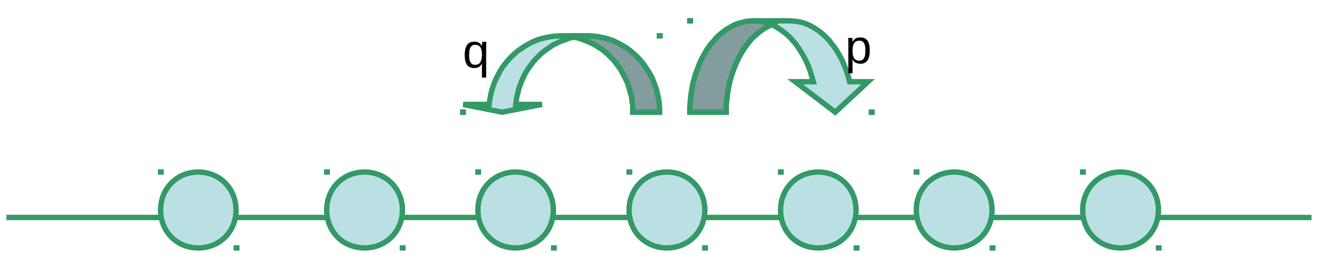
La hormiga en el laberinto

La hormiga

Distribucion Binomial

Sea una secuencia de N realizaciones independientes con dos posibles resultados $+1$o -1.

p	proba de	$+1$
q	"	-1
	$p+q=1$	



Si se hacen N realizaciones y entonces $\left\{ \begin{array}{l} n \leftrightarrow 1 \text{ y } m \leftrightarrow -1 \\ \\ n + m = N \end{array} \right.$

La probabilidad de una dada permutacion es

$$\boxed{p^n q^m}$$

La probabilidad de una dada combinacion de n salidas $+1$ y de m salidas -1.

$$\boxed{P_N(n) = \frac{N!}{n!m!} p^n q^m}$$

esto es la distribucion binomial

$$\sum_{n=0}^{N} P_N(n) = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$= (p+q)^N$$

$$= 1$$

(por teorema del binomio)

Para el <n>

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} P_N(n) n$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{nN!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^{N} P_N(n) = p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N$$

$$= pN$$

$$\langle n \rangle^2 = (Np)^2$$

del mismo modo

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{N} P_N(n)\, n^2$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{n^2 N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} =$$

$$= p\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}\right)\right] =$$

$$= p\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N\right] = p\frac{\partial}{\partial p} Np(p+q)^{N-1} = pN + p^2 N(N-1)$$

$$= pN + (Np)^2 - p^2 N = (Np)^2 + Np(1-p) = (Np)^2 + Npq$$

De donde

$$\sigma_N^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = (Np)^2 + Npq - (Np)^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_N = \sqrt[2]{Npq}$$

$$\frac{\sigma_N}{\langle n \rangle} = \sqrt[2]{Npq}\,\frac{1}{Np} = \sqrt[2]{\frac{q}{p}}\,\frac{1}{\sqrt[2]{N}}$$

Que pasa si el experimento se hace sin reemplazo?

Bolas rojas y azules

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

Donde

N=numero maximo de “bolitas”
k=numero de exitos
n-k=numero de fracasos
n=numero de experimentos
m=numero maximo de exitos
N-m=numero maximo de fracasos

	drawn	not drawn	total
successes	k	$m-k$	m
failures	$n-k$	$N+k-n-m$	$N-m$
total	n	$N-n$	N

Estoy sacando n bolitas y quiero k rojas de un total de N bolitas con m rojas y n azules

Distribucion normal

Sea la binomial bajo las siguientes condiciones

N es grande

pN es grande

entonces los factoriales se escriben (aprox. de Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Entonces

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!m!}p^n q^m = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{(N-n)}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi(N-n)}\left(\frac{N-n}{e}\right)^{(N-n)}}p^n(1-p)^{(N-n)}$$

$$= p^n(1-p)^{(N-n)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\left(\frac{n}{N}\right)^{-n-1/2}\left(\frac{N-n}{N}\right)^{n-N-1/2}\right]$$

Esto puede ser reescrito

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left[\begin{array}{c} -(n+½)\ln(\frac{n}{N}) - (N-n+½)\ln(\frac{N-n}{N}) \\ +n\ln p + (N-n)\ln(1-p) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp[-n\ln(\tfrac{n}{N}) - (N-n)\ln(\tfrac{N-n}{N}) + n\ln p + (N-n)\ln(1-p)]$$

Esto tiene un maximo en $n = \langle N \rangle = Np$

Desarrollando en serie el exponente de la exponencial alrededor de $n =< n >$

$$P_N(n) = P_N(\langle n \rangle)\exp\left[\tfrac{1}{2}B_2(n-\langle n \rangle)^2 + \tfrac{1}{6}B_3(n-\langle n \rangle)^3 + \ldots\right]$$

$$P_N(n) = P_N(\langle n \rangle)\exp[\tfrac{1}{2}B_2\epsilon^2 + \tfrac{1}{6}B_3\epsilon^3 + \ldots]$$

Con $B_k = \left(\frac{d^k \ln\left[\sqrt{2\pi N}\, P_N(n)\right]}{dn^k} \right)_{n=\langle n \rangle}$

Calculando B_2 y B_3 se obtiene

$$B_2 = \frac{-1}{Npq}$$

$$B_3 = \frac{1}{N^2p^2q^2}(q^2 - p^2)$$

Se puede ver que

$$|B_k| < \frac{1}{(Npq)^{k-1}}$$

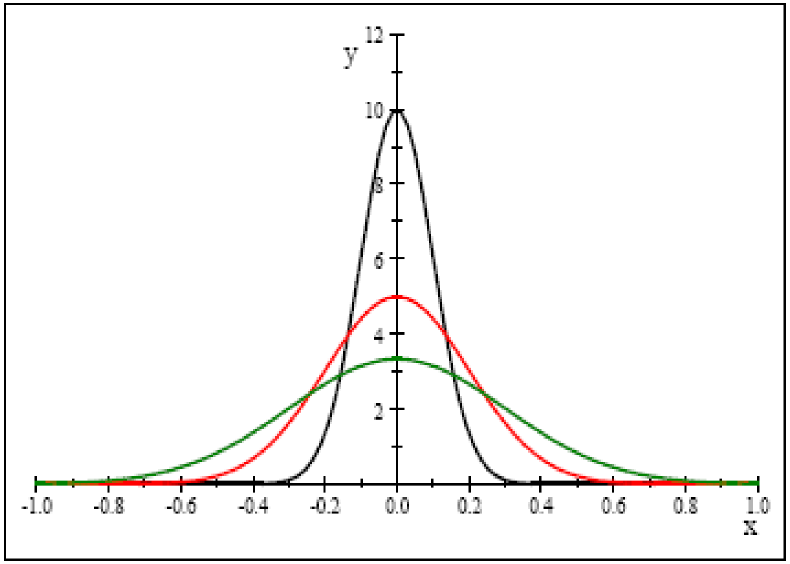
si $\epsilon \ll Npq$ se pueden despreciar terminos de orden superior a ϵ^2

$$\boxed{P_N(n) \approx P_N(\langle n \rangle) \exp\left[-\frac{1}{2}|B_2|\epsilon^2\right]}$$

$P_N(\langle n \rangle)$ se determina por normalizacion

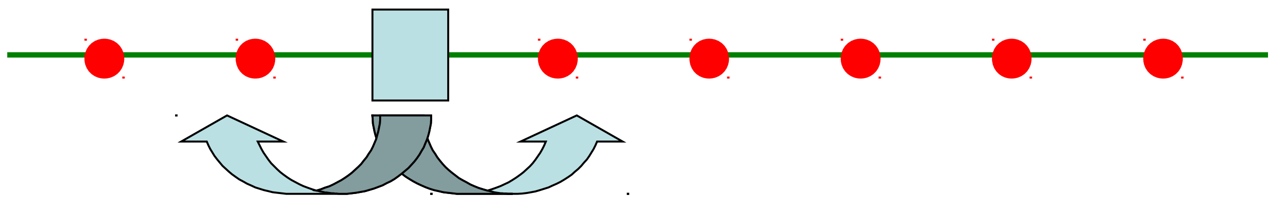
$$\boxed{P_N(n) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt[2]{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{\sigma_N^2}\right]}$$

$$P_N(n) = \frac{1}{0.1}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(n)^2}{0.01}\right]$$



Caminata al azar

Sea el problema unidimensional de la caminata aleatoria

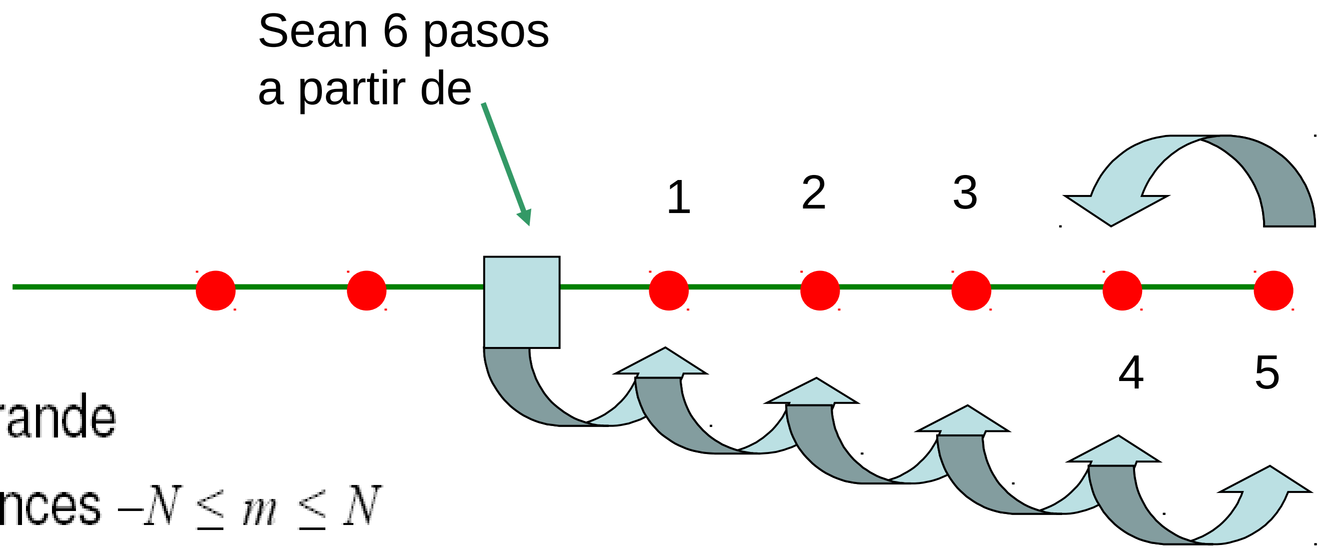


Se movera con pasos de tamaño fijo y tendra una probabilidad $p = 1/2$ de moverse a la derecha y $(1-p) = q = 1/2$ de hacerlo a la izquierda.

Supongamos que da N pasos.

n_1 sera el numero de pasos asociados a p o sea los que da a la derecha y $(N - n_1) = n_2$ los que dara a la izquierda.

El desplazamiento neto sera $m = (n_1 - n_2)$



Sea N grande

Entonces $-N \leq m \leq N$

Pero m estara dado por $m = N,\ N-2,\ N-4,$ etc.

Tomando en cuenta que

$$m = (n_1 - n_2) = (n_1 - N + n_1) \Rightarrow$$

$$n_1 = (m + N)/2$$

Reemplazamos en

$$P_N(n_1) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt[2]{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(n_1 - \langle n_1 \rangle)^2}{\sigma_N^2}\right]$$

Obtenemos con

$\langle n_1 \rangle = \langle m/2 \rangle + N/2$

$\langle m \rangle = 0$ por simetria

$$(n_1 - \langle n_1 \rangle)^2 = m^2/4$$

$$\sigma_N^2 = Npq = \frac{1}{4}N$$

Entonces

$$P_N(n_1) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt[2]{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(n_1 - \langle n_1 \rangle)^2}{\sigma_N^2}\right]$$

$$\boxed{P_N(m) = \left[\frac{2}{\pi N}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{m^2}{2N}\right]}$$

Ahora lo pensamos en terminos del desplazamiento neto tomando en cuenta que cada paso es de longitud l

$$x = ml$$

Sea $\Delta x \gg l$

entonces la proba de que la particula este entre $x \to x + \Delta x$ luego de

N pasos es

$$P_N(x)\Delta x = P_N(m)(\Delta x/2l)$$

pues las posiciones accesibles estan separadas $2l$

quedara entonces

$$P_N(x) = \left[\frac{1}{2\pi N l^2}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2N}\left(\frac{x^2}{l^2}\right)\right]$$

Si la particula da n pasos por unidad de tiempo, en t

$$P_N(x,t)\Delta x = \left[\frac{1}{2\pi n t l^2}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2nt}\left(\frac{x^2}{l^2}\right)\right]\Delta x$$

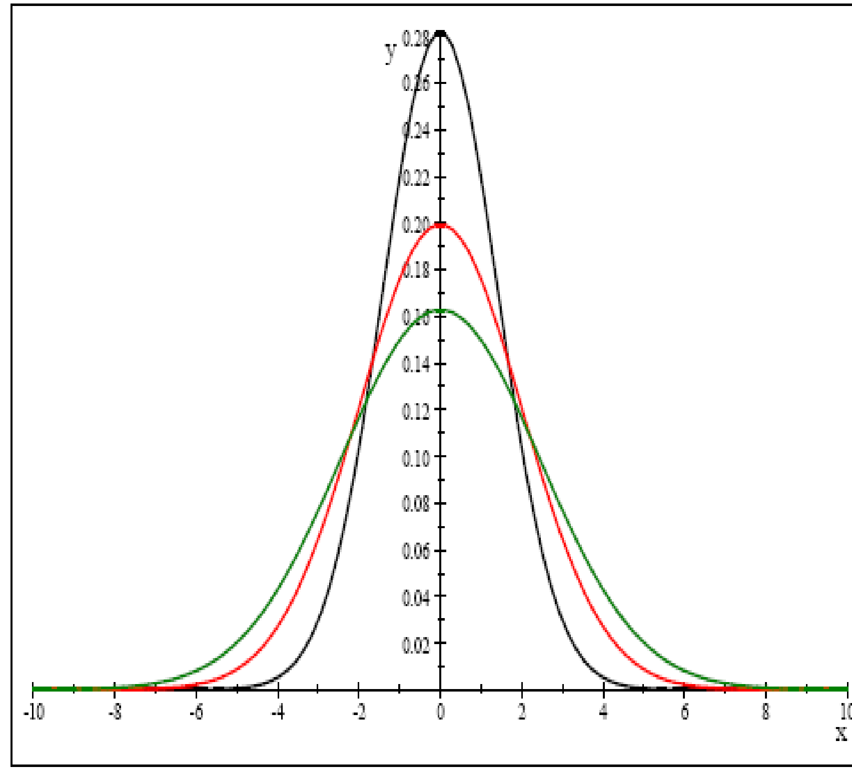
Si $D = \frac{1}{2} n l^2$

$$P_N(x,t)\Delta x = \left(\frac{1}{2(\pi)^{1/2}}\right)\exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]$$

$$P_N(x,t)\Delta x = \left(\frac{1}{2(\pi D t)^{1/2}}\right)\exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]\Delta x$$

Como $<x>= 0$ → $<x^2>$ va como $4Dt$

$$\boxed{<x^2> \propto t}$$



Todo los anterior es para un problema unidimensional son todos los nodos "llenos" , luego no hay restriccion en la evolucion.

Cuando estamos por encima de p_c esto es lo que obtenemos.

Ecuacion Maestra

Para la probabilidad de ocupacion de un nodo tenemos:

$$\boxed{P_i(t+\tau) - P_i(t) = \sum_j [\sigma_{ji} P_j(t) - \sigma_{ij} P_i(t)]}$$

("a la Pauli")

Donde

$P_i(t+\tau)$ =densidad de proba de ocupacion del estado i en tiempo $t+\tau$

σ_{ji} = densidad de probabilidad de transicion de $j \rightarrow i$ en τ

De donde podemos definir los siguientes modelos de hormiga

Las hormigas saltan de nodo ocupado a nodo ocupado pues se mueven en un cluster

Sea z el numero de vecinos inmediatos

Hormiga ciega $\Rightarrow$

σ_{ji} = $1/z$ si i es accesible (ocupado) y

σ_{ji} = 0 si i es inaccesible (vacio)

Hormiga miope $\Rightarrow$ $\sigma_{ji} = 1/z_j$ donde z_j es el numero de vecinos ocupados.

Para tiempos largos

$$dP_i/dt = \sum_j [\sigma_{ji} P_j(t) - \sigma_{ij} P_i(t)]$$

Donde ahora σ_{ji} es por unidad de tiempo.

Si estamos debajo de p_c los clusters seran finitos.

Luego debemos llegar a un estado estacionario, en este caso $dP_i/dt = 0$, entonces

$$0 = \sum_j [\sigma_{ji} P_j(t) - \sigma_{ij} P_i(t)]$$

Sea s el tamaño del cluster

si la hormiga es

ciega $\Rightarrow \sigma_{ji} = \sigma_{ij} = 1/z \Rightarrow P_j(t) = P_i(t) = 1/s$

miope $P_i(t) \rightarrow z_i/s$.

Entonces para la hormiga ciega:

todos los nodos son equivalentes y de alli la distancia asintotica R, es la distancia media entre nodos del cluster lo que pasa a ser R_s.

(R_s es el radio del cluster)

Si promediamos sobre todos los tamaños de cluster obtenemos :

$$R^2 = \sum_s n_s s R_s^2 \propto (p - p_c)^{\beta - 2\nu}$$ $(t\to\infty,\ p<p_c)$

Momento de orden $1+2\nu\sigma$

1) Para $p = 1$

$$R^2 \propto Dt$$ Con $D=1$

2) Cuando nos alejamos de $p = 1$ como sigue siendo "compacto" la ley sera igual pero con $D = D(p)$

3) Como debajo de p_c no hay difusion $\Rightarrow D$ debe irse a 0

Se ha demostrado que $D = \Sigma \Rightarrow R^2 \propto \Sigma t$

De donde cerca de $p_c \Rightarrow D \propto (p - p_c)^{\mu}$. Con μ el exponente de la conductibilidad

$$M_k = \sum s^k n_s \propto c^{(\tau - 1 - k)/\sigma}$$

$$\sum s R_s^2 n_s \Rightarrow k = 1 + \frac{2}{D} = 1 + 2\sigma\nu \Rightarrow$$

$$\frac{\tau - 1 - k}{\sigma} = \frac{\tau - 1 - 1 - 2\sigma\nu}{\sigma} = \frac{\tau - 1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} - 2\nu$$

$$= \beta + (\beta + \gamma) - \frac{1}{\sigma} - 2\nu = \beta + \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} - 2\nu$$

$$= \beta - 2\nu$$

Si promediamos sobre todos los tamaños de cluster obtenemos :

$$R^2 = \sum_s n_s s R_s^2 \propto (p - p_c)^{\beta - 2\nu}$$ $(t \to \infty,\ p<p_c)$

Momento de orden $1+2\nu\sigma$

1) Para $p = 1$

$$R^2 \propto Dt$$ Con $D=1$

2) Cuando nos alejamos de $p = 1$ como sigue siendo "compacto" la ley sera igual pero con $D = D(p)$

3) Como debajo de p_c no hay difusion $\Rightarrow D$ debe irse a 0

Se ha demostrado que $D = \Sigma \Rightarrow R^2 \propto \Sigma t$

De donde cerca de $p_c \Rightarrow D \propto (p - p_c)^{\mu}$. Con μ el exponente de la conductibilidad

Como se combinan estos comportamientos?

proponemos

$$\boxed{R = t^k r[(p - p_c)t^x]}$$

aqui aparece el tiempo!!!!!

a) para $p > p_c$

$$\boxed{R \propto t^k (p - p_c)^{\mu/2} t^{x\mu/2} \propto t^{k + x\mu/2} D^{1/2}}$$

de donde obtenemos el $D^{1/2}$

pero ademas t debe ir como $t^{1/2}$ de donde $k = (1 - \mu x/2)$

b) para $p < p_c$

R varia como $(p - p_c)^{\beta - 2\nu}$

b) para $p < p_c$

R varia como $(p - p_c)^{\beta - 2\nu}$

$$R = t^k r[(p - p_c)t^x] \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Para que esto ajuste necesitamos que} \\ x = \dfrac{1}{2\nu + \mu - \beta} \\ \text{y} \\ k = \dfrac{\nu - \beta/2}{2\nu + \mu - \beta} \end{array} \right.$$

c) para $p = p_c$

nos queda

$$R \propto t^k$$

con un exponente anomalo $(k < 1/2)$. con $k = 0.33$ para 2 dimensiones y $k \sim 0.2$en 3 dimensiones