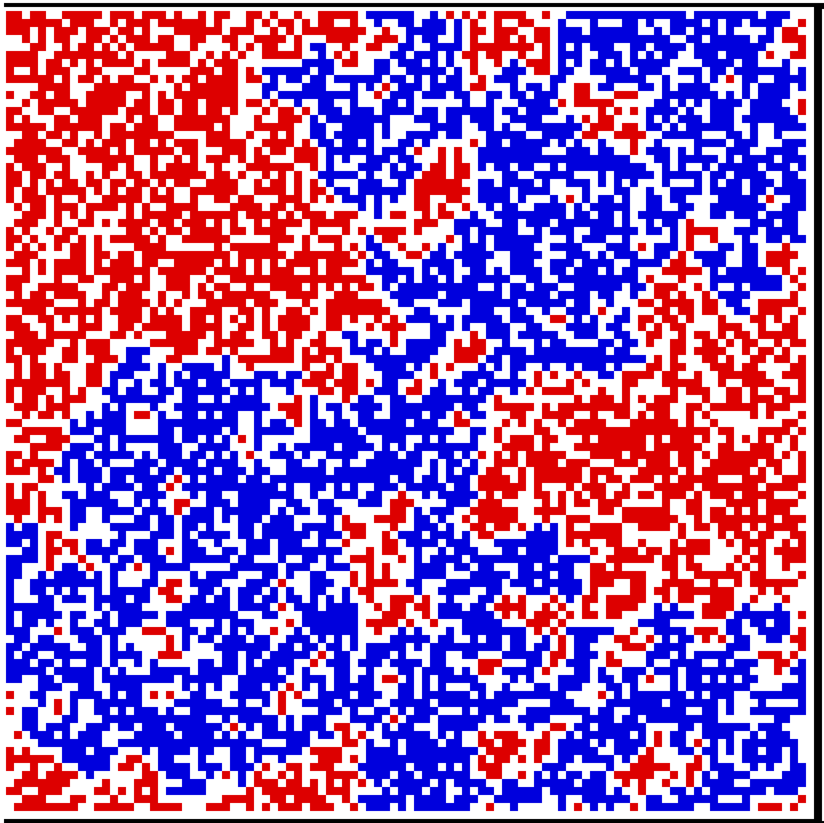
Monte Carlo
Finite size scaling
Large Cell Monte Carlo



Parcialito

a) Cual es el número de clusters de tamaño **s** por nodo en una red Unidimensional

b) Como es la $g(r)$ en un problema unidimensional infinito

c) Cual es la dimensión efectiva de una red de Bethe (justifique)

d) Que forma tiene $n(s)$ para una red de dimension $1<d$

e) Que es ξ ?

Como se comporta alrededor de p_c ?

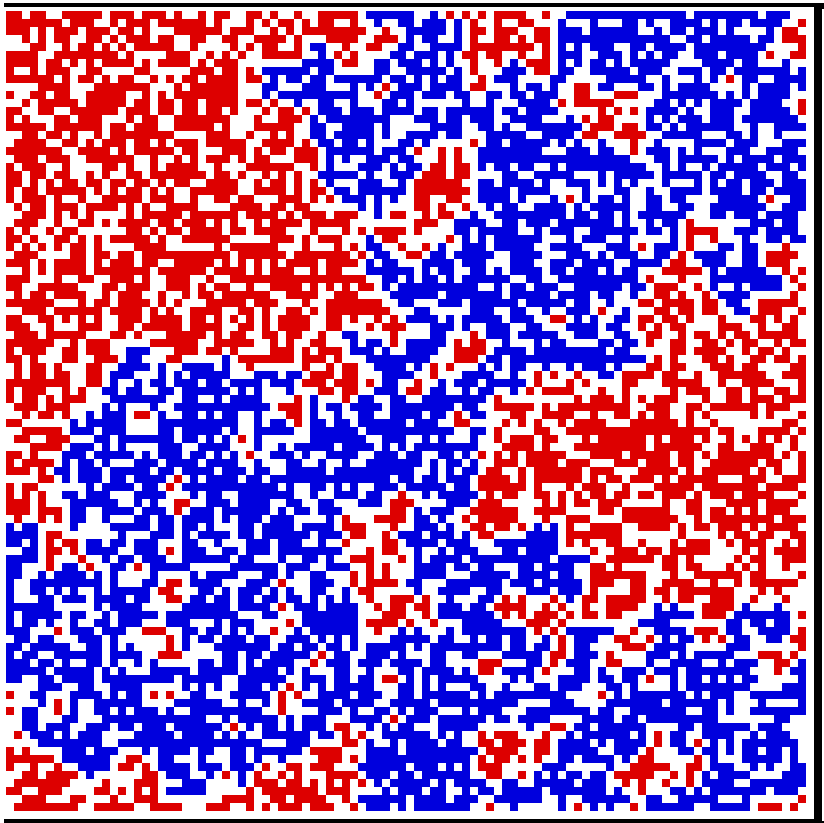
Cual es el significado por arriba y por debajo de p_c

f) Cual es el resultado de estudiar el comportamiento de $M(L)$

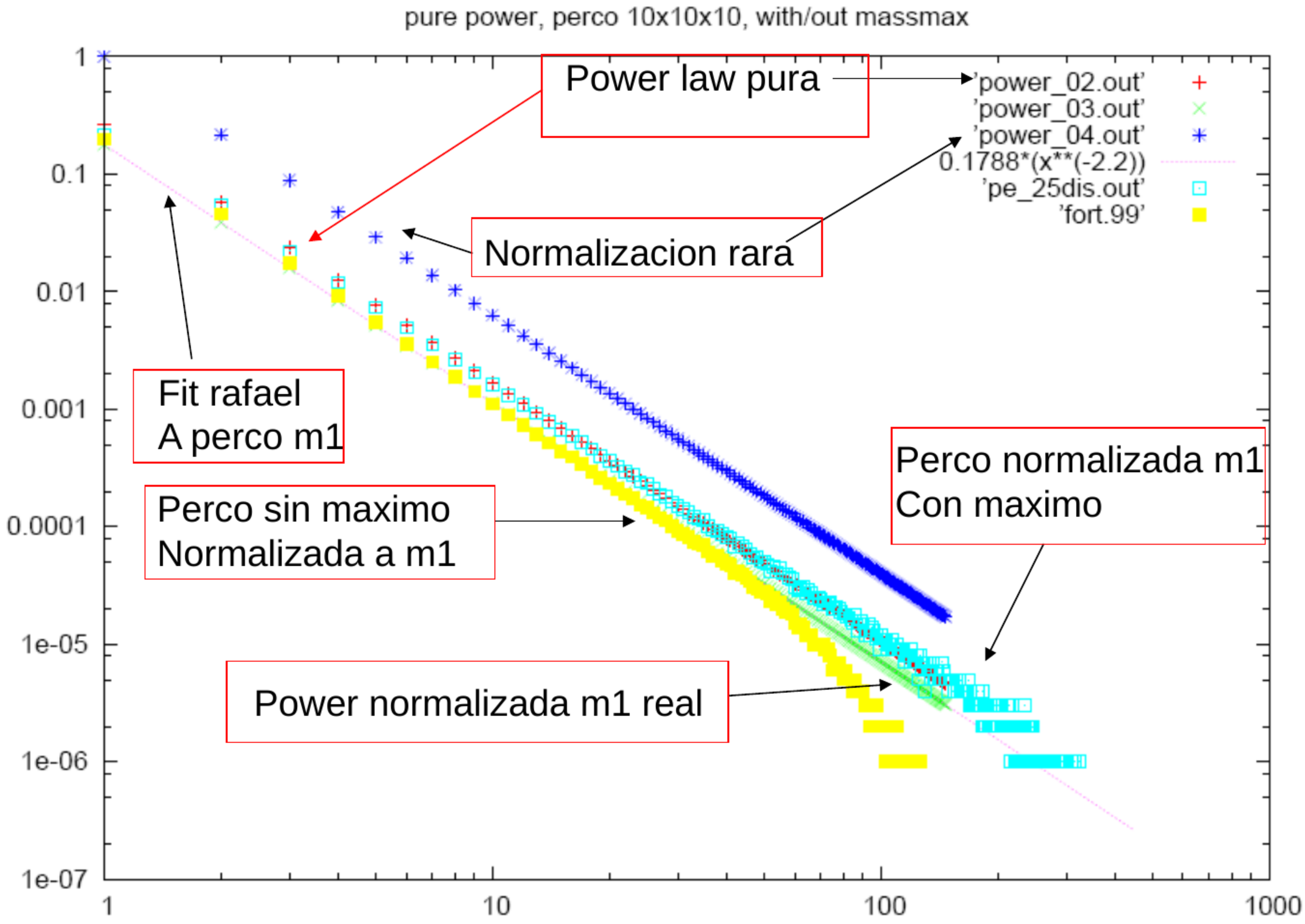
Si $\mathbf{L<}\ \xi$ Si $\mathbf{L>}\ \xi$

g) Suponga renormaliacion de celda pequeña para la red trigular
Cual es la forma de p'?

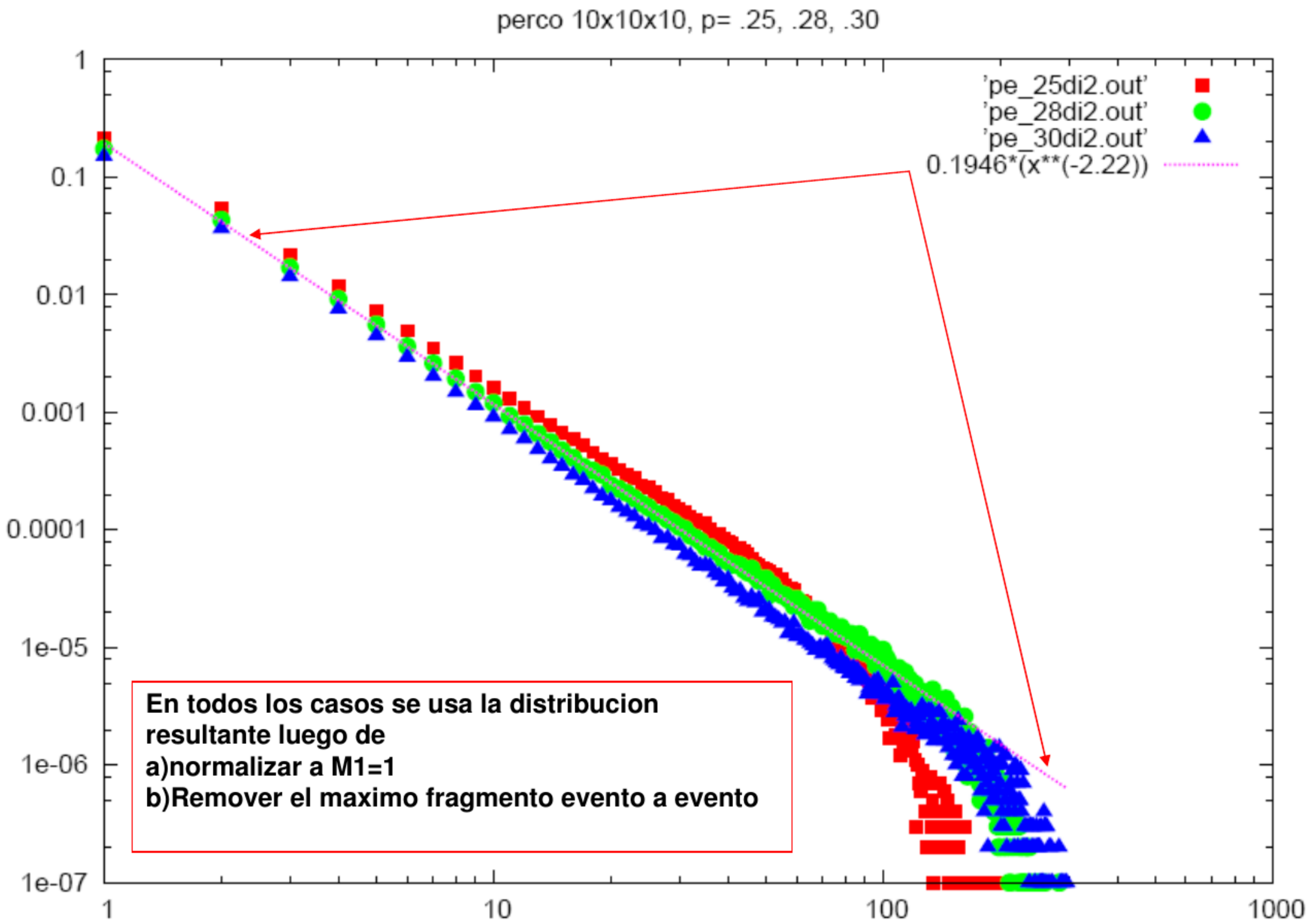
Monte Carlo
Finite size scaling
Large Cell Monte Carlo



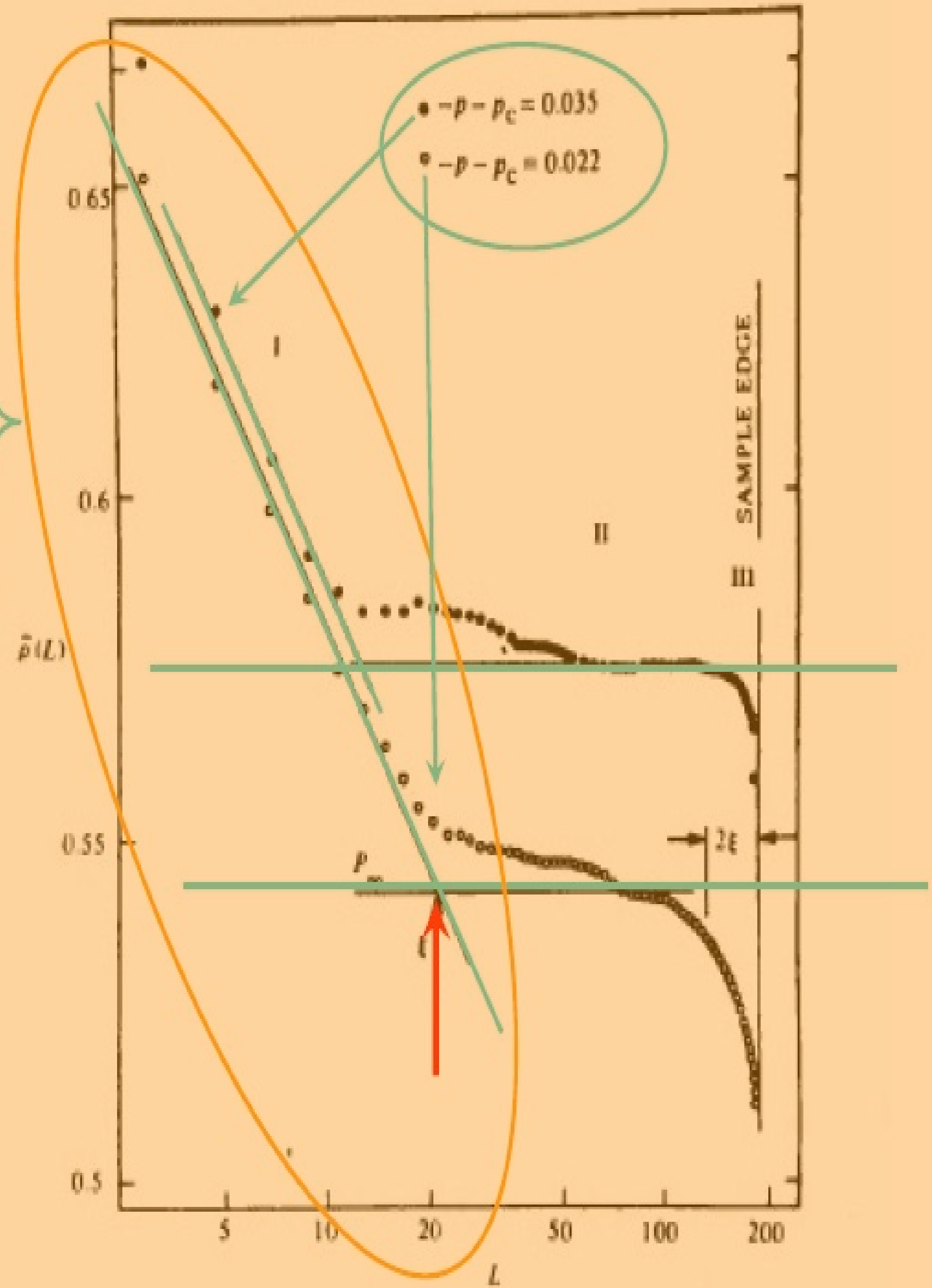
Resultado



pure power, perco 10x10x10, with/out massmax
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
1e-05
1e-06
1e-07
1
10
100
1000
'power_02.out'
'power_03.out'
'power_04.out'
0.1788*(x**(-2.2))
'pe_25dis.out'
'fort.99'
Power law pura
Normalizacion rara
Fit rafael
A perco m1
Perco sin maximo
Normalizada a m1
Perco normalizada m1
Con maximo
Power normalizada m1 real


perco 10x10x10, p= .25, .28, .30
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
1e-05
1e-06
1e-07
1
10
100
1000
'pe_25di2.out'
'pe_28di2.out'
'pe_30di2.out'
0.1946*(x**(-2.22))
En todos los casos se usa la distribucion
resultante luego de
a)normalizar a M1=1
b)Remover el maximo fragmento evento a evento

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{L^D}{L^d} = L^{(D-d)}$$



$$\boxed{\text{Para } L < \xi \Rightarrow M(L,\xi) \propto L^D}$$

$$\boxed{\text{Para } L > \xi \Rightarrow M \propto PL^d}$$

o sea la fuerza del cluster infinito por el volumen.

Si dividimos el volumen L^d

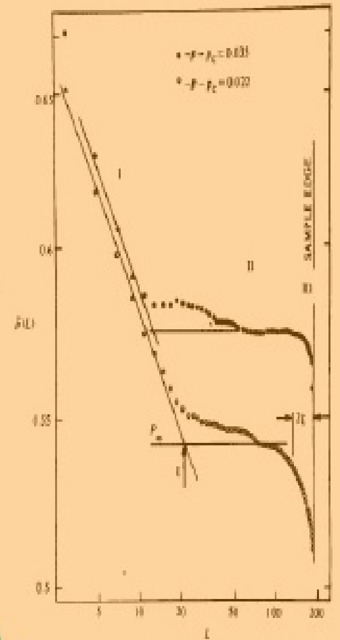
En celdas de volumen ξ^d

La masa en cada celda es ξ^D

Tendremos $(L/\xi)^d$ celdas

La masa total es $M \propto (L/\xi)^d \xi^D$

$$\boxed{M \propto (L/\xi)^d \xi^D \propto PL^d}$$



De aqui tenemos que los dos comportamientos se manifiestan por encima y debajo de ξ , ahora ponemos ambos comportamientos en una sola expresion.

Como el cambio de comportamiento corresponde al cociente L/ξ luego

$$\boxed{M(L,\xi) = L^{D} m(L/\xi)}$$

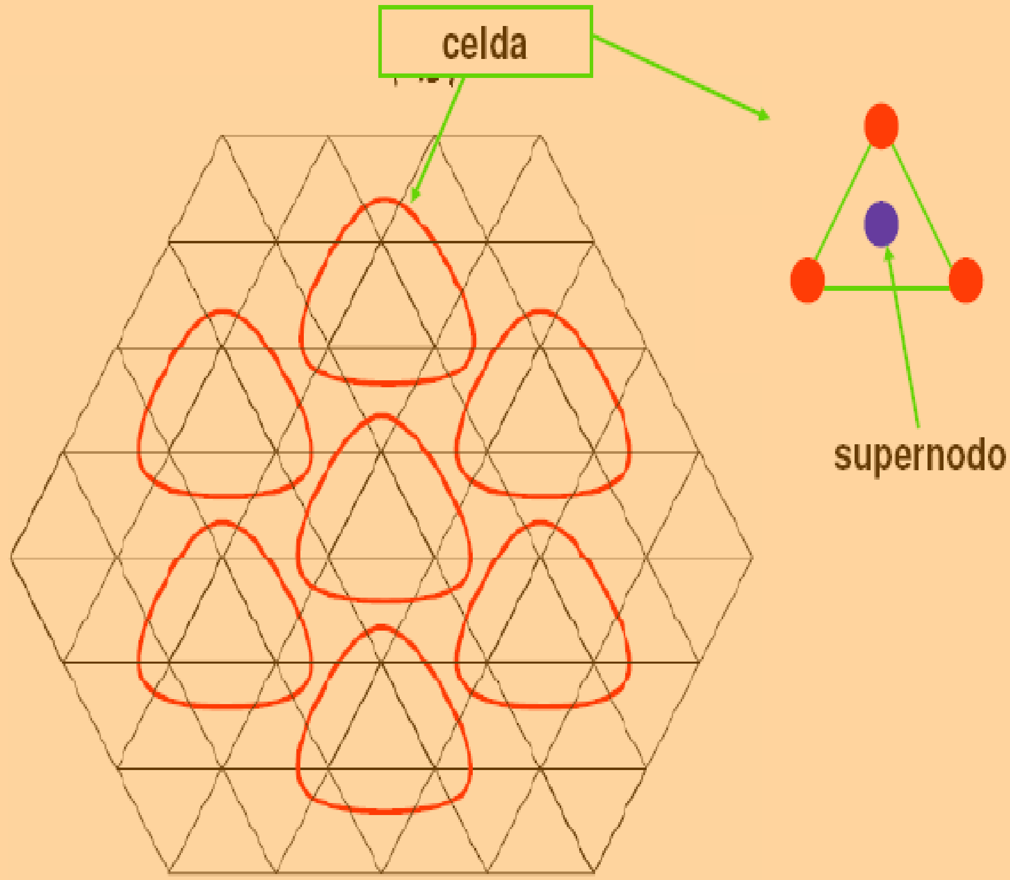
con $m(L/\xi) = m(x)$ y si $x \ll 1$, $m(x) = cte.$ y para x
$m(x) \propto x^{d-D} = (L/\xi)^{d-D}$.

Otra forma de escribirlo es (con $\xi = (p-p_c)^{-\nu}$)

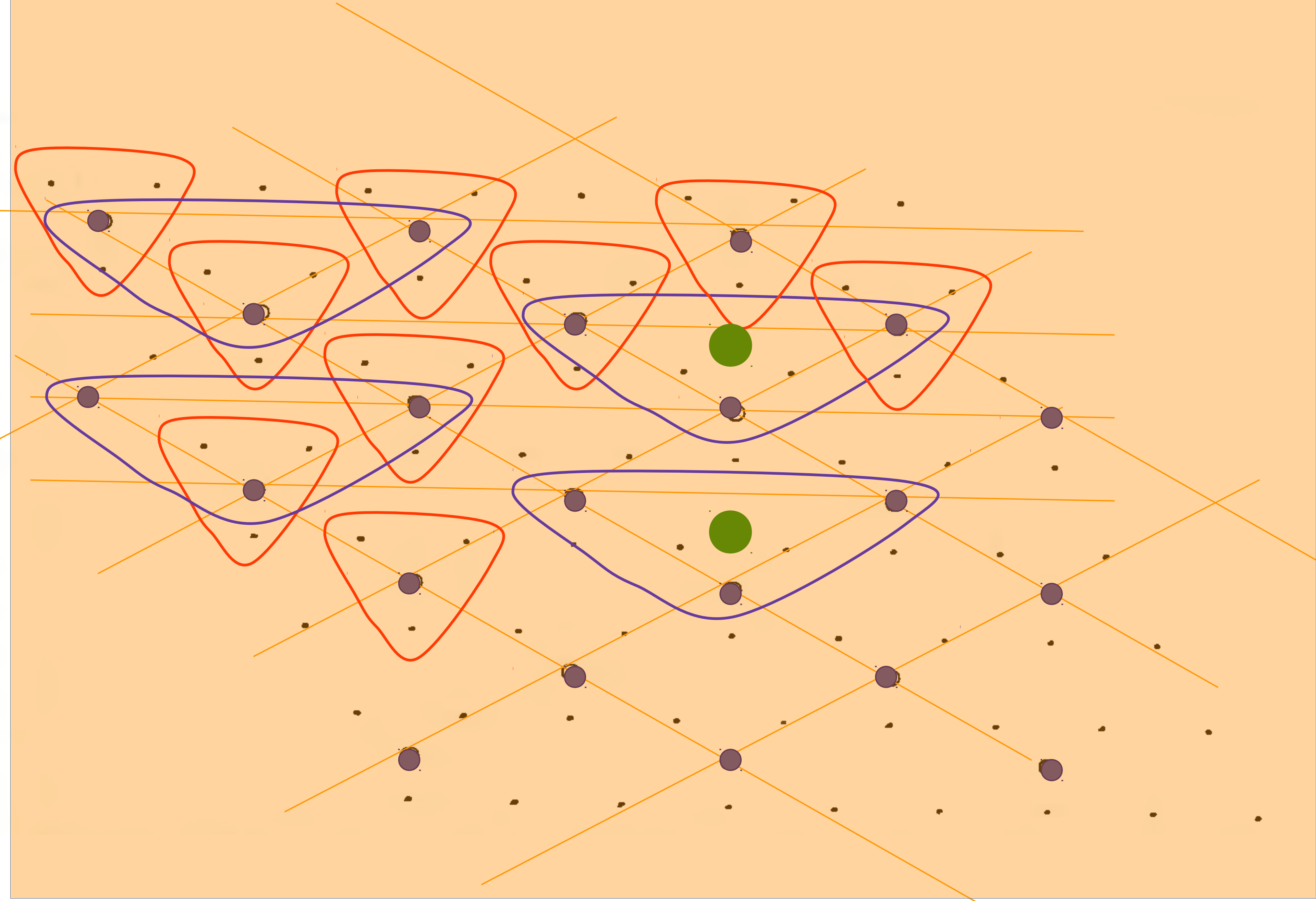
$$M(L,(p-p_c)) = L^{D} m'((p-p_c)L^{1/\nu})$$

Renormalizacion en percolacion

Sea una red triangular



La red triangular y la renormalizacion



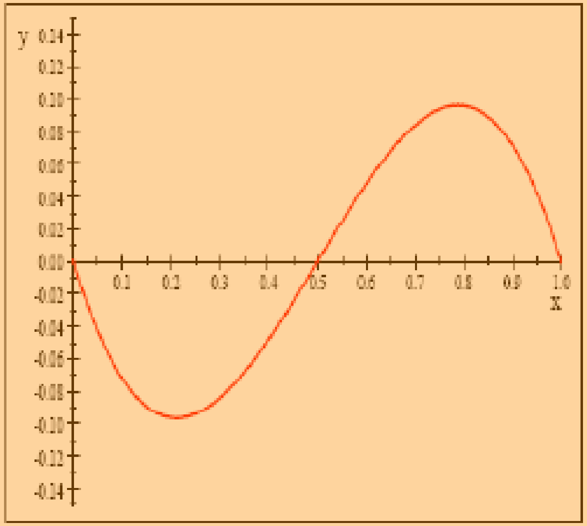
En este caso estamos escalenado con una "distancia tipica" $b = \sqrt[2]{3}$ pues $b^2 = 3$ que es el numero de nodos que contiene la celda.

$$b \ll \xi$$

- Pensamos que los nuevos "supernodos" estaran ocupados si la celda original tiene 3 o 2 nodos ocupados, como resultado de este criterio la probabilidad de ocupacion de estos nuevos supernodos es

$$\boxed{p' = p^3 + 3p^2(1-p)}$$

p´-p



p

De donde se ve que p' es invariante para $p = 0$ y $p = 1$, que son triviales (la vacia queda vacia y la llena queda llena).

Para la red original

$$\boxed{\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}}$$

la red renormalizada debera ser

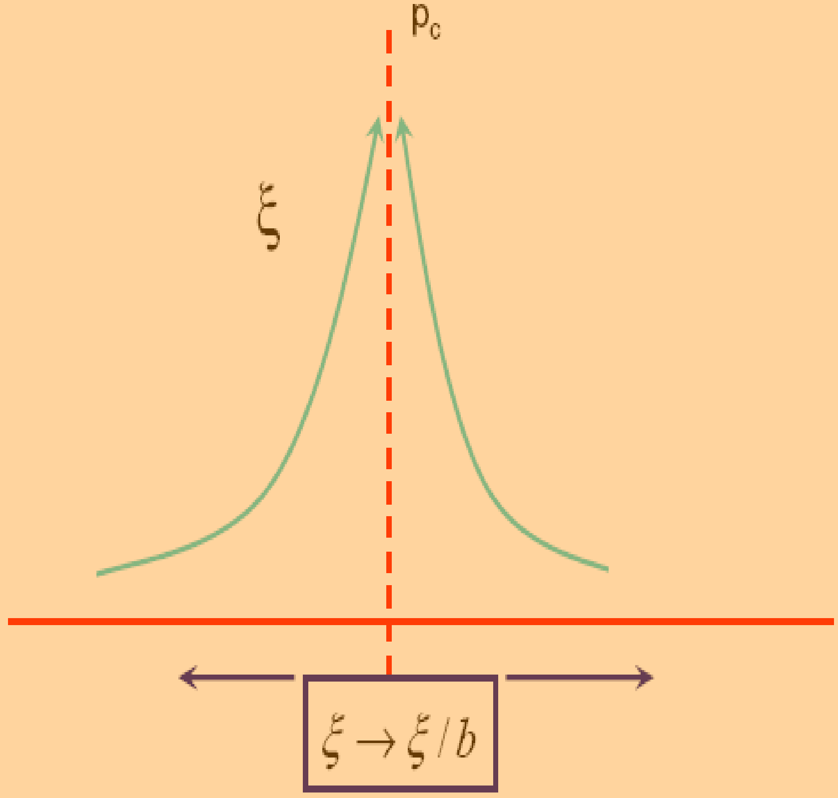
$$\boxed{\xi' \propto (p' - p_c)^{-\nu}}$$

Pero debido a la transformacion de escala

$$\boxed{\xi' = \xi/b}$$

De done

$$\boxed{b|p' - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu}}$$ de donde


p_c
ξ
$\xi \to \xi / b$

Pero que pasa si ξ es finito?

Teniamos : $M(L,\xi) = b^{lD} M(L/b^l, \xi/b^l)$

a) Si $L \ll \xi$ se itera hasta que $b^l = L$ y toda la lattice se reduce a un punto

$$\boxed{M(L,\xi) = L^D M(1,\infty) \propto L^D}$$

No depende de ξ

$$\frac{\xi}{b^l} \rightarrow \frac{\xi}{L} \text{ con } \xi >> \text{L}$$

$b)$ Si $L >> \xi$ y $p > p_c$

Se itera hasta que

$\boxed{b^l = \xi}$ (luego se acaba la autosimilaridad)

En ese punto

$$\boxed{\xi_{eff} = \frac{\xi}{b^l} = 1}$$

Entonces con $p > p_c \Rightarrow p_{eff} \rightarrow 1 \Rightarrow$ El sistema se vera uniforme

Observar que $\xi_{eff} \sim 1$ es el minimo

$$M(L,\xi) = b^{Dl} M\left(\frac{L}{b^l};\frac{\xi}{b^l}\right)$$

En este caso $b^{lD} \rightarrow \xi^D$ y $M(L/b^l, \xi/b^l) \rightarrow M(L/\xi, 1) \propto (L/\xi)^d$ pues el sistema es "uniforme"

$$\boxed{M(L,\xi) = \xi^D (L/\xi)^d}$$

c) si $p < p_c$ la p_{eff} sera casi 0 y $M(x,1)$ corresponde a grandes lattice animals y entonces $M(L,\xi) = \xi^D (L/\xi)^{D_a}$ con D_a la dimension fractal de estos animales.

La relación

$$M(L,\xi) = b^{lD} M(L/b^l, \xi/b^l)$$

Da lugar al escaleo de tamaño finito

Con $b^l=\xi$

$$M(L,\xi)=\xi^D m(L/\xi)$$

Observar que si tenemos una magnitud que para $L \gg \xi$ y $p > p_c$ y se comporta como `$[p-p_c]^{-\chi}$ entonces usando argumentos de Renormalizacion

Podemos proponer

$$X(L,\xi) = \xi^{\chi/\nu} x_1(L/\xi)$$

con

$$X(L,\xi) \propto \xi^{\chi/\nu} \quad \text{para } L \gg \xi$$

y

$$X(L,\xi) \propto L^{\chi/\nu} \quad \text{para } L \ll \xi$$

o

$$M(L,\xi) = b^{Dl} M\left(\frac{L}{b^l};\frac{\xi}{b^l}\right)$$

si

$L \gg \xi$ y $p > p_c$

$$M(L,\xi) = \xi^{D}\left(\frac{L}{\xi}\right)^{d}$$

$$\boxed{X(L,p) = (p-p_c)^{-\nu} x_2((p-p_c)L^{1/\nu})}$$

Como se identifica p_c a partir del analisis de redes finitas.

Para una red finita siempre se puede encontrar un cluster percolante (es decir para toda probabilidad p).

Sea Π la proba de encontrar un tal cluster.

Π = proba de encontrar cluster ∞

.

Para un problema unidimensional, la probabilidad de encontrarlo es $\Pi = p^L = \exp(-L/\xi)$ (remember $g(r) = \exp(-r/\xi)$) .

.

Para un sistema **infinito** $\Pi(p > p_c) = 1$ y $\Pi(p < p_c) = 0$ (ojo es un escalon, es una densidad de probabilidad si pensamos al espacio de los posibles estados como (1,2) con [0,1]

.

$\Pi(p, L)$ es la proba que una red de dimension lineal L percole para p.

Siguiendo el ejemplo de la masa en redes finitas proponemos que

$$\boxed{\Pi = \Phi[(p - p_c)L^{1/\nu}]}$$

donde ν es el exponente asociado al crecimiento de la escala tipica del problema ξ.

.

Donde no aparece un termino multiplicando a Φ porque en $p = p_c$ se debe cumplir que $\Pi = 1$ (con $\Phi(0, \infty) = 1$)

$\boxed{\Phi(x) \text{ debe crecer de } 0 \rightarrow 1 \text{ con } (x << p_c) \rightarrow (x >> p_c)}$

.

Como Π va entre 0 y 1 se parece a una cumulativa o distribucion.

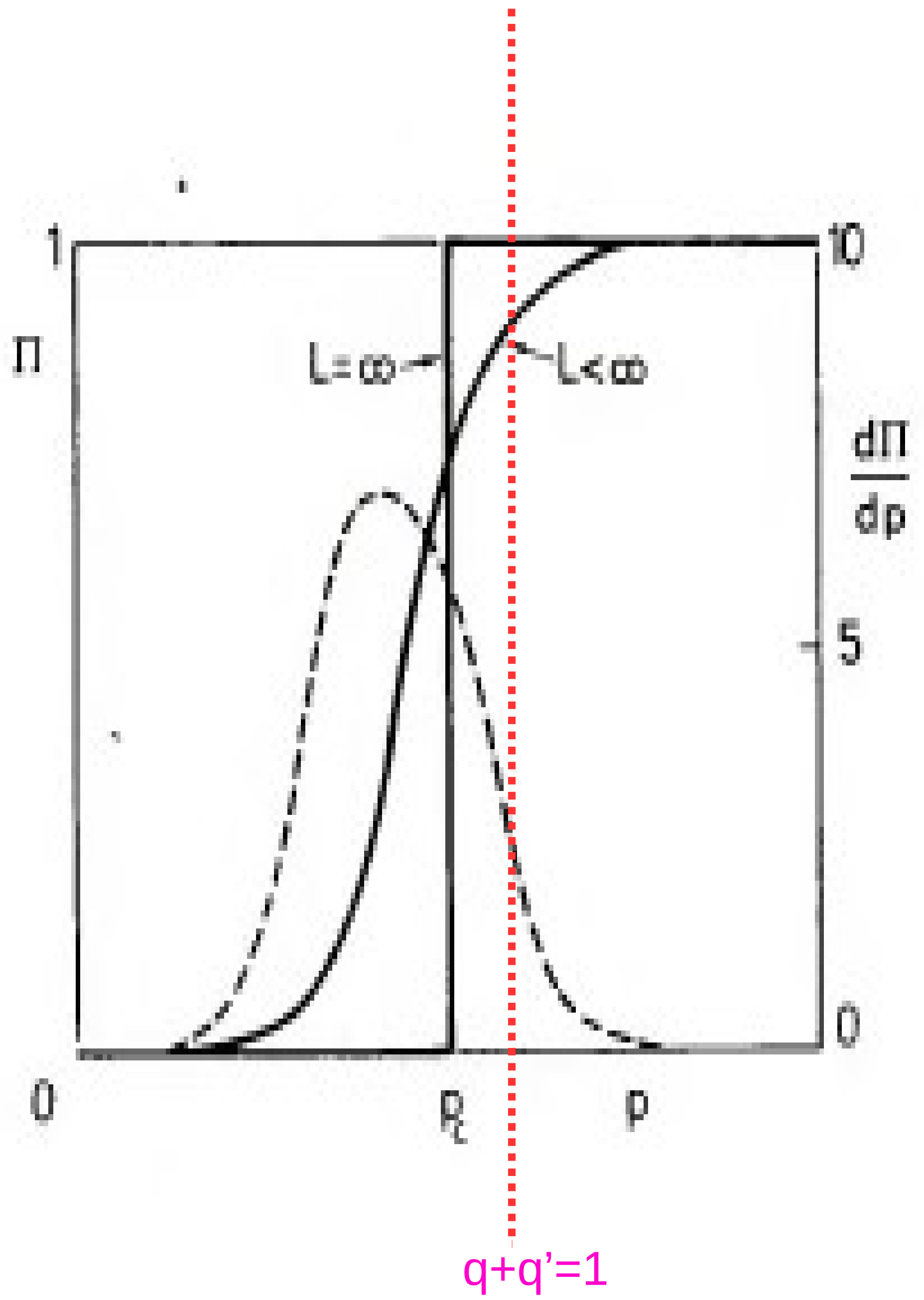
Una distribucion de que?

Para el caso infinito en p_c empieza a percolar asi que corresponde a pasar del estado 1 al 2.

Cuando es finito podemos discretizar y nos dice que si para cada p se realizan m experimentos n percolan entonces

$$\boxed{\Pi(p) = \frac{n(p)}{m}}$$

o sea la fraccion de caminos que llegan al otro lado.



1
Π
L=∞
L<∞
10
dΠ
dp
5
0
0
p_c
p
q+q'=1

Si calculamos

$$\boxed{\frac{d\Pi}{dp} = L^{1/v}\Phi'[(p-p_c)L^{1/v}]}$$

Esto es una densidad de probabilidad pues su integral va entre 0 y 1.

.

Si yo voy incrementando la probabilidad de ocupacion o, lo que es lo mismo, la densidad de nodos ocupados, cuando percolara por primera vez? cuando existira por primera vez un experimento exitoso?

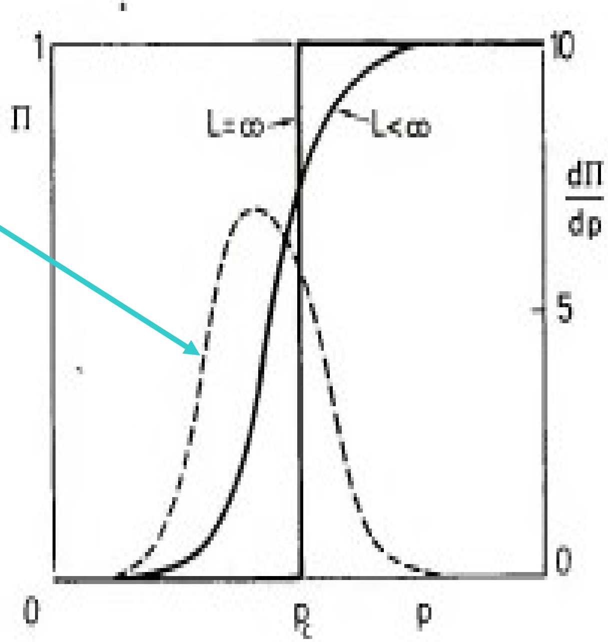
Sea

$$\boxed{\frac{d\Pi}{dp} = \frac{1}{m}\frac{dn(p)}{dp} \sim \frac{1}{m}\frac{[n(p') - n(p)]}{[(p' - p)]}}$$

.

Esquematicamente esto se debe comportar asi, Π en $L \to \infty$ debe irse al escalon, su derivada a la $\delta(p - p_c)$

$$\boxed{\frac{d\Pi}{dp} = \frac{1}{m}\frac{dn(p)}{dp}}$$



.

Pero para L finito es una "funcion ancha".

Sea p_{av} la probabilidad media a la cual por primera vez aparece un cluster percolante.

$$\boxed{p_{av} = \int p\left(\frac{d\Pi}{dp}\right)dp}$$

para $L \to \infty$ da p_c.

Numericamente corresponde a tomar una red grande y empezar a ocuparla y ver cuando aparece el cluster percolante por primera vez. Repetirlo muchas veces y promediar.

.

Metodo alternativo : estudiar la distribucion del segundo momento

.

Pero lo importante es ver como este p_{av} converge al p_c

$$\boxed{p_{av} = \int p\left(\frac{d\Pi}{dp}\right)dp = \int pL^{1/v}\Phi'[(p-p_c)L^{1/v}]dp}$$

$$z = (p-p_c)L^{1/v} \Rightarrow$$

$$dz = dpL^{1/v} \Rightarrow p = p_c + zL^{-1/v}$$

$$\boxed{p_{av} = L^{-1/\nu} \int z\Phi'(z)dz + p_c \int \Phi'(z)dz}$$

, como $\int \Phi'(z)dz = 1 \Rightarrow p_{av} - p_c = L^{-1/\nu} \int z\Phi'(z)dz \Rightarrow$

$$p_{av} - p_c \propto L^{-1/\nu}$$

$\boxed{\text{O sea que } p_{av} \rightarrow p_c \text{ como } L^{-1/\nu}}$

.

Pero se ve facil que podemos definir

$$\Delta = p(\Pi = 0.9) - p(\Pi = 0.1)$$

Que es el ancho de la zona de transición que es arbitraria a *p* constante

al crecer L debe compensar p$\Rightarrow$ p$\to$p$_c$

Si vario $L \Rightarrow$ el argumento de $\Phi[(p-p_c)L^{1/v}]$ se debe mantener constante (tal que de 0.9 y 0.1!), de donde

$$\boxed{\Delta \propto L^{-\frac{1}{\nu}}}$$

$$\Delta = p(\Pi = 0.9) - p(\Pi = 0.1)$$

Por otro lado:

Si definimos

$$\Delta^2 = \int (p-p_{av})^2 \left(\frac{d\Pi}{dp}\right) dp = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle - p_{av}{}^2$$

entonces $\Delta = \sqrt{\langle p^2 \rangle - p_{av}{}^2}$

Dado Δ puedo determinar v

Renormalizacion de Celda Grande

Hasta ahora vimos la renomalizacion para celdas pequeñas

En las celdas pequeñas nos fijamos en como tratar los nodos (o bonds) interiores a la celda, pero las relaciones entre celdas estan totalmente dejadas de lado.

Large-cell Monte Carlo renormalization group for percolation*

Peter J. Reynolds, H. Eugene Stanley, and W. Klein
Department of Physics and Center for Polymer Studies, Boston University, Boston, Massachusetts 02215
(Received 13 August 1979)

Ahora ilustramos el problema en la *superficie* de la celda

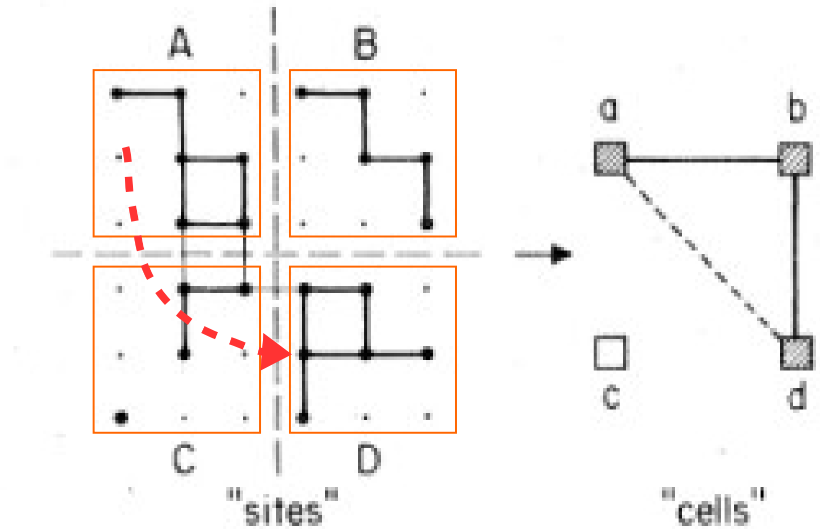
Tenemos las celdas A B C D

Una celda puede ser reemplazada por un super nodo si “percola”

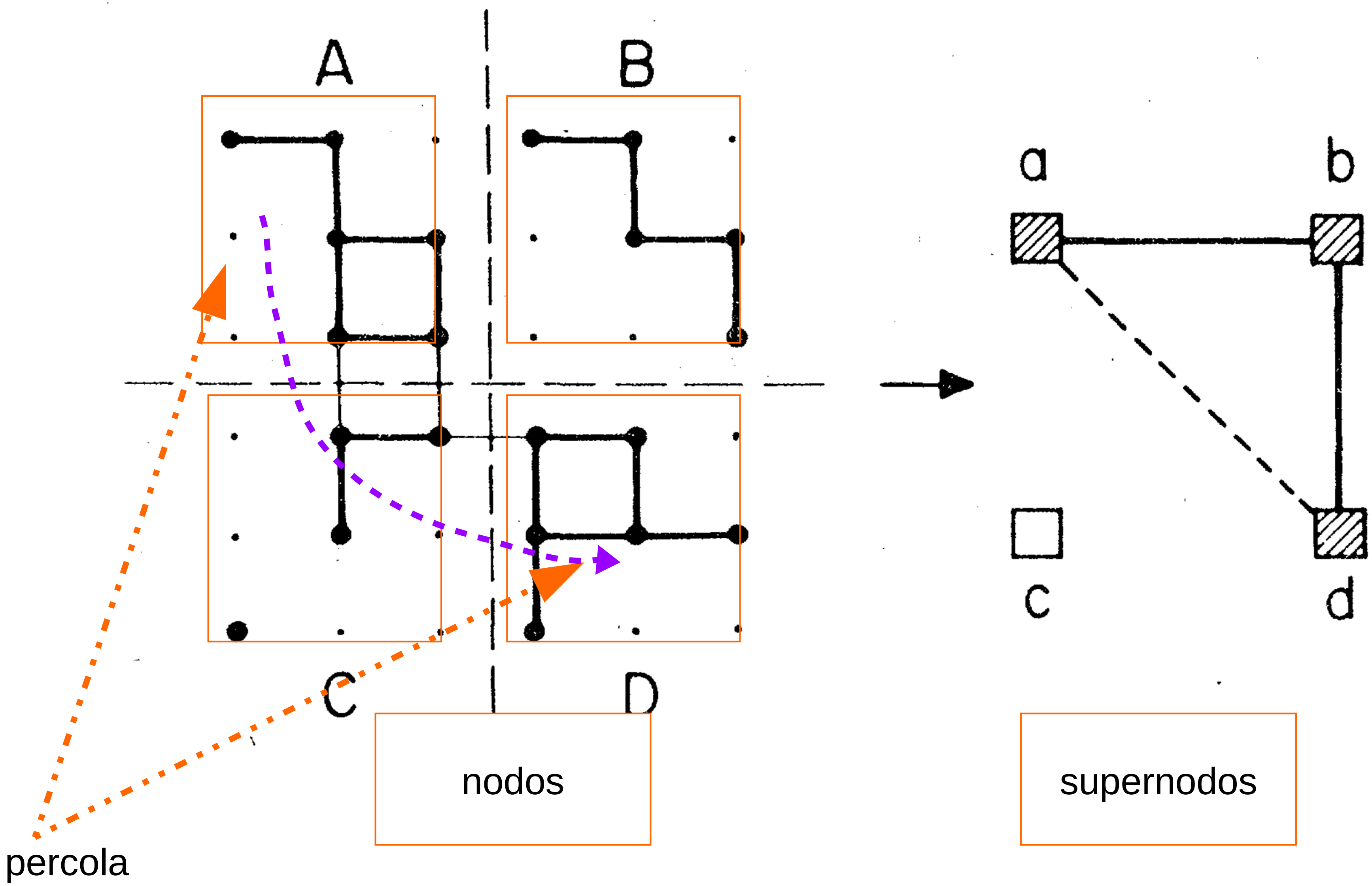
i) En la estructura original A no esta relacionada con B a nivel de “nodos”

Pero si a nivel de celdas

Ten



ii) A-C-D estan relacionados a nivel de nodos pero no a nivel de celdas


A
B
C
D
a
b
c
d
nodos
supernodos
percola

O sea hay efectos de superficie que modifica el "estado" del sistema al hacer la renormalizacion

.

Cual es la ventaja de usar una celda grande?

Lo que queremos solucionar es el hecho que aparezcan como desconectadas, luego de la renormalizacion, dos celdas que si lo estaban. (o la contraria)

.

Focalizamos en la vecindad del punto critico (clusters grandes)

Para que una celda este ocupada luego de la renormalizacion

es que es contenga un cluster percolante (para la celda)

-Sea X_α la fraccion de nodos que pertenecen al cluster percolante en la celda α

-Sea X_β la fraccion de nodos que pertenecen al cluster percolante en la celda β

La celda es de dimension b contiene b^d nodos.

.

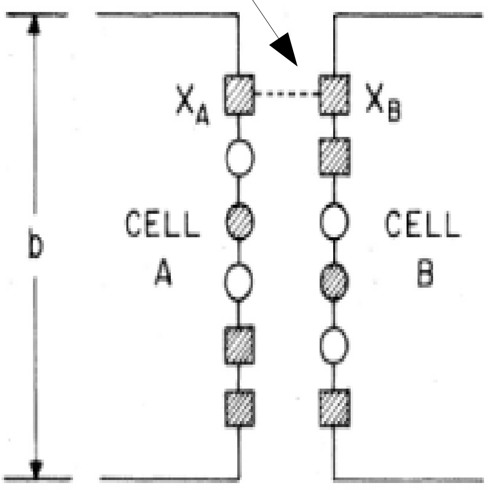
Si pensamos en redes "cubicas" en d dimensiones, "la superficie de contacto" de las celdas involucran b^{d-1} puntos de "contacto".

1)La proba de que un nodo del lado α de la interface este ocupado es X_α

2) del lado β es X_β.

3) Ambos deben ser ocupados simultaneamente para que las celdas esten conectadas

- luego la proba de que ambos esten ocupados es $X_\alpha X_\beta$
- la de que esten desconetados es $(1 - X_\alpha X_\beta)$



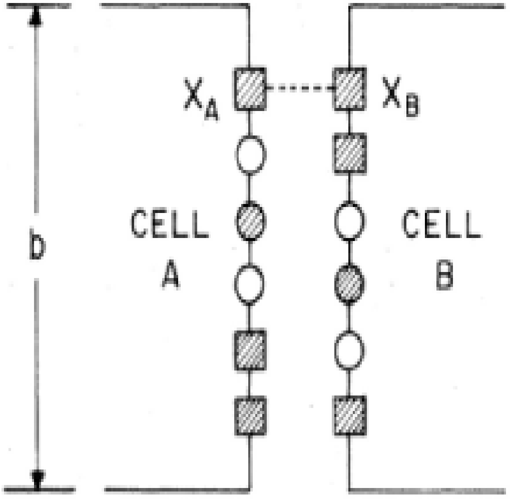
Luego la proba de que las dos celdas no esten conectadas es

$$\boxed{\left(1-X_{\alpha}X_{\beta}\right)^{\left(b^{(d-1)}\right)}}$$

.

. Entonces con $b \to \infty$ esto se va a 0 luego cuanto mayor es la celda mejor es el proceso.

$$p' = \left[\left(1-X_a X_b\right)^{b^{d-1}}\right]$$



Relaciones de recurrencia

2	$p^4 + 4p^3q$
3	$p^9 + 9p^8q + 36p^7q^2 + 52p^6q^3 + 25p^5q^4$
4	$p^{16} + 16p^{15}q + 120p^{14}q^2 + 560p^{13}q^3 + 1686p^{12}q^4 + 3176p^{11}q^5 + 3632p^{10}q^6 + 2408p^9q^7 + 844p^8q^8 + 120p^7q^9$

Entonces

Necesitamos usar celdas muy grandes

Necesitamos encontrar el punto fijo de la transformación p→p´

Sea p_{av} la probabilidad media a la cual por primera vez aparece un cluster percolante.

$$p_{av} = \int p \left(\frac{d\Pi}{dp} \right) dp$$

Con

$$p_{av} - p_c \propto L^{-1/\nu}$$

Realizacion practica

.

1) Usando secuencias de numeros aleatorios (entre 0-1) y poblamos los nodos de una celda.

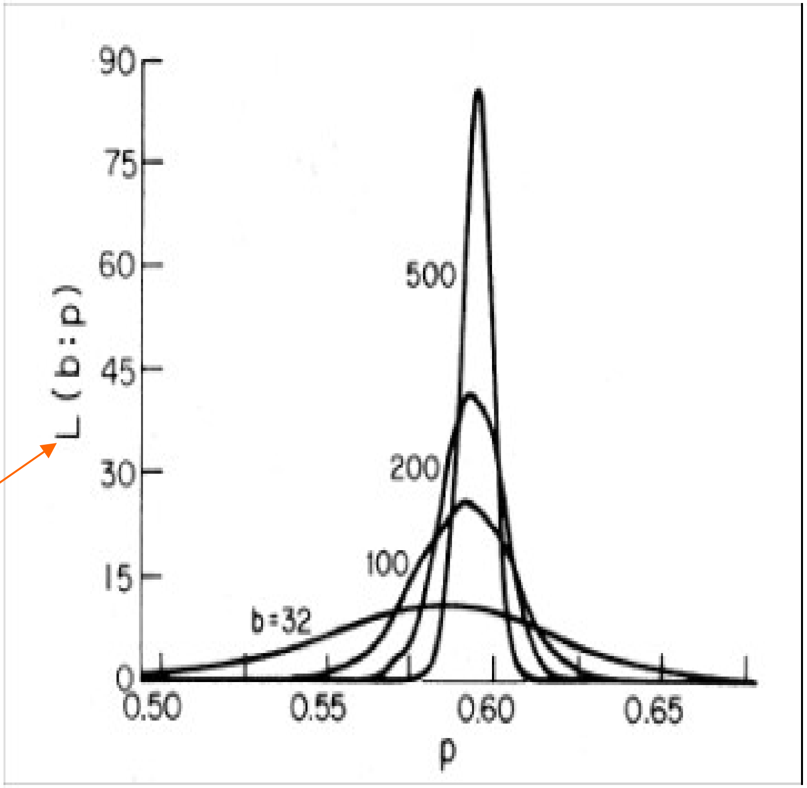
2) Luego variamos el valor de p por debajo del cual ocupamos cada nodo.

3) Luego nos fijamos para cual valor de p la celda percola por primera vez

de alli se construye

Entonces obtenemos la
Densidad de probabilidad
Para 32x32 , 100x100 ,
200x200,500x500

De que percole por primera vez
A probabilidad *p*

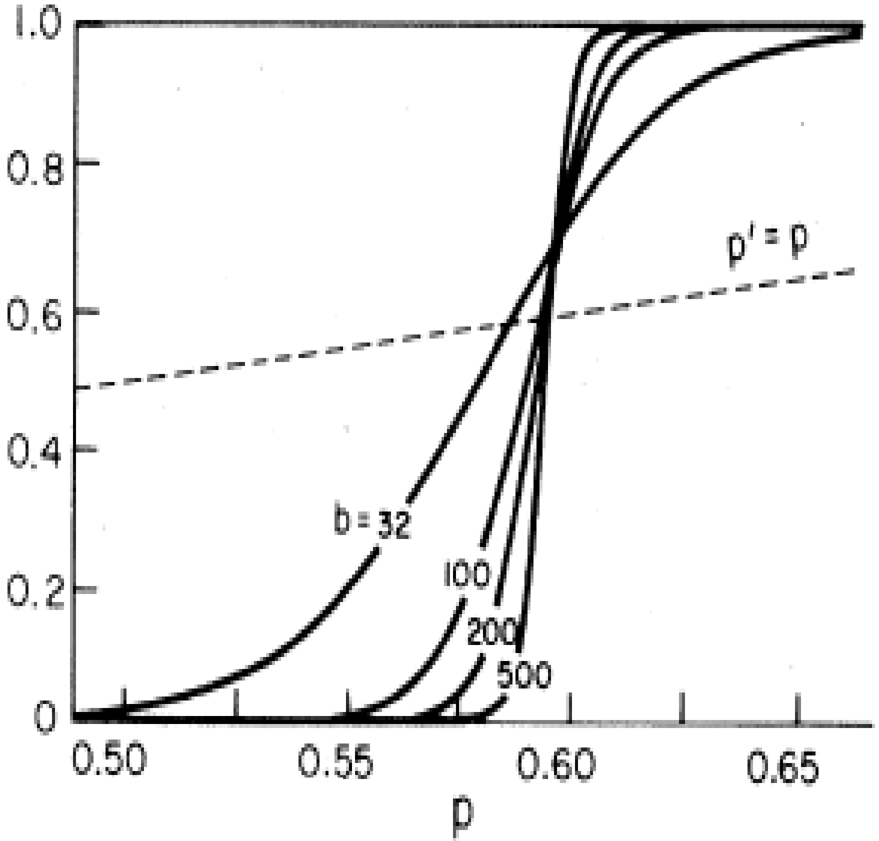


O sea que obtenemos

$$L = \frac{d\Pi}{dp}$$

A partir de lo anterior se construye la cumulativa $\Pi(p)$
y se obtiene

$$\Pi(p)$$



la condicion de punto fijo es

$$p' = \Pi(p)$$

A medida que crece b la densidad se aproxima a una δ

.

Supongamos que entonces aproximamos el comportamiento del la densidad a una gaussiana, entonces (para b muy grande)

con $$f(z) \propto \exp\left(\frac{-z^2}{2\Delta^2}\right)$$

$$z = (p - p_{av}) / \Delta$$

con $$\Delta^2 = \frac{\int z^2 f(z)\, dz}{\int f(z)\, dz}$$

.

La forma de la densidad es entonces

$$\frac{d\Pi}{dp} = (2\pi)^{-1/2} \Delta^{-1} \exp\left[\frac{-(p - p_{av})^2}{2\Delta^2}\right]$$

Con esto aplicamos la renormalizacion

.

La condicion de punto fijo es $\Pi(p^*) = p^*$

$$\boxed{p^* = \int_{p=0}^{p=p^*} \frac{d\Pi}{dp} dp}$$

(la probabilidad total de percolar a p)

Usando la aproximacion gaussiana y haciendo el cambiio de coordenadas:

$$\boxed{z = (p - p_c)/\Delta}$$

$$\boxed{p^* = (2\pi)^{-1/2} \int_{z(p=0)}^{z(p=p^*)} \exp(-z^2/2)\,dz}$$

.

los limites de integracion son entre $z = -\infty$ y $z = (p^* - p_{av})/\Delta$

.

La condicion de punto fijo $\Rightarrow$

$\boxed{p^* \text{ debe ser la misma para distintos } b.}$

$\Rightarrow$

La integral debe mantenerse constante al variar ***b***

Al variar ***b*** varia Δ

Luego para que la integral se mantenga cte

(p^*-p_{av}) debe variar como Δ que es $\propto b^{-1/\nu}$

Usando la tecnica usual de desarrollar en torno del punto fijo :

$$\boxed{p' - p^* = \lambda(p - p_c)}$$

.

recordando que la $\boxed{\text{condicion de punto fijo es } \Pi(p^*) = p^*} \Rightarrow$

con $\lambda = \frac{d\Pi}{dp}\Big|_{p^*} = (2\pi)^{-1/2}\Delta^{-1}\exp\left[\frac{-(p-p_{av})^2}{2\Delta^2}\right]$ pero como el exponente es cte por lo que vimos

$$\boxed{\lambda = (2\pi)^{-1/2}\Delta^{-1} cte}$$

.

de donde recordando que $[b(p' - p_c)^{-\nu} = (p - p_c)^{-\nu}]$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln \lambda}{\ln b}$$

.

$$\lambda = (2\pi)^{-1/2} \Delta^{-1} cte$$

o sea

$$y(b) = \frac{\ln(1/\Delta)}{\ln b} - \frac{C}{\ln b}$$

determinando $y(b)$ podemos calcular el valor asintotico para $1/\nu$ y se obtiene $1/\nu = 3/4 \Rightarrow \nu = 4/3$

Resultados

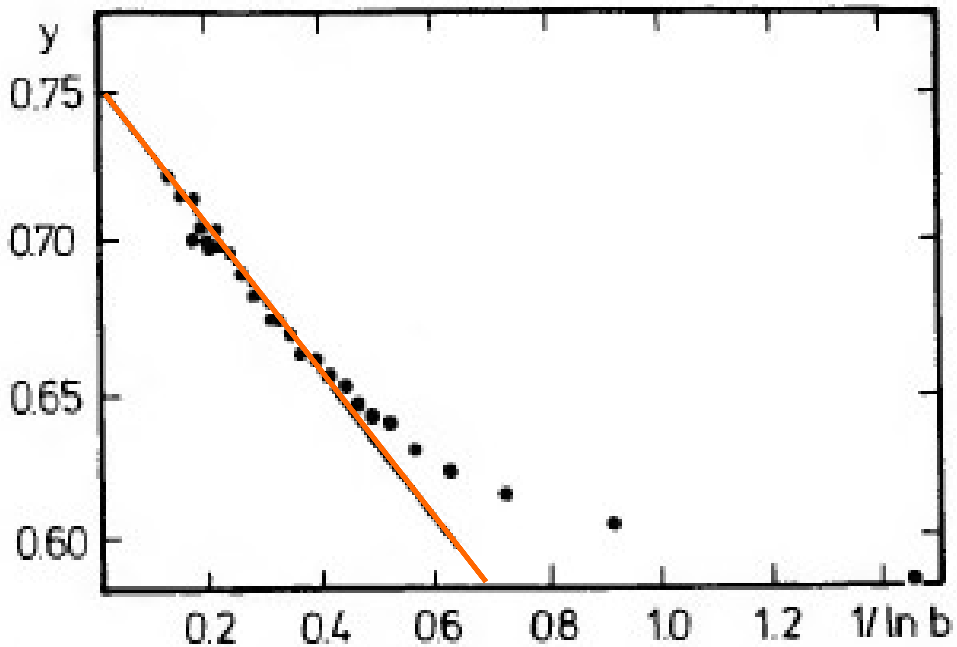


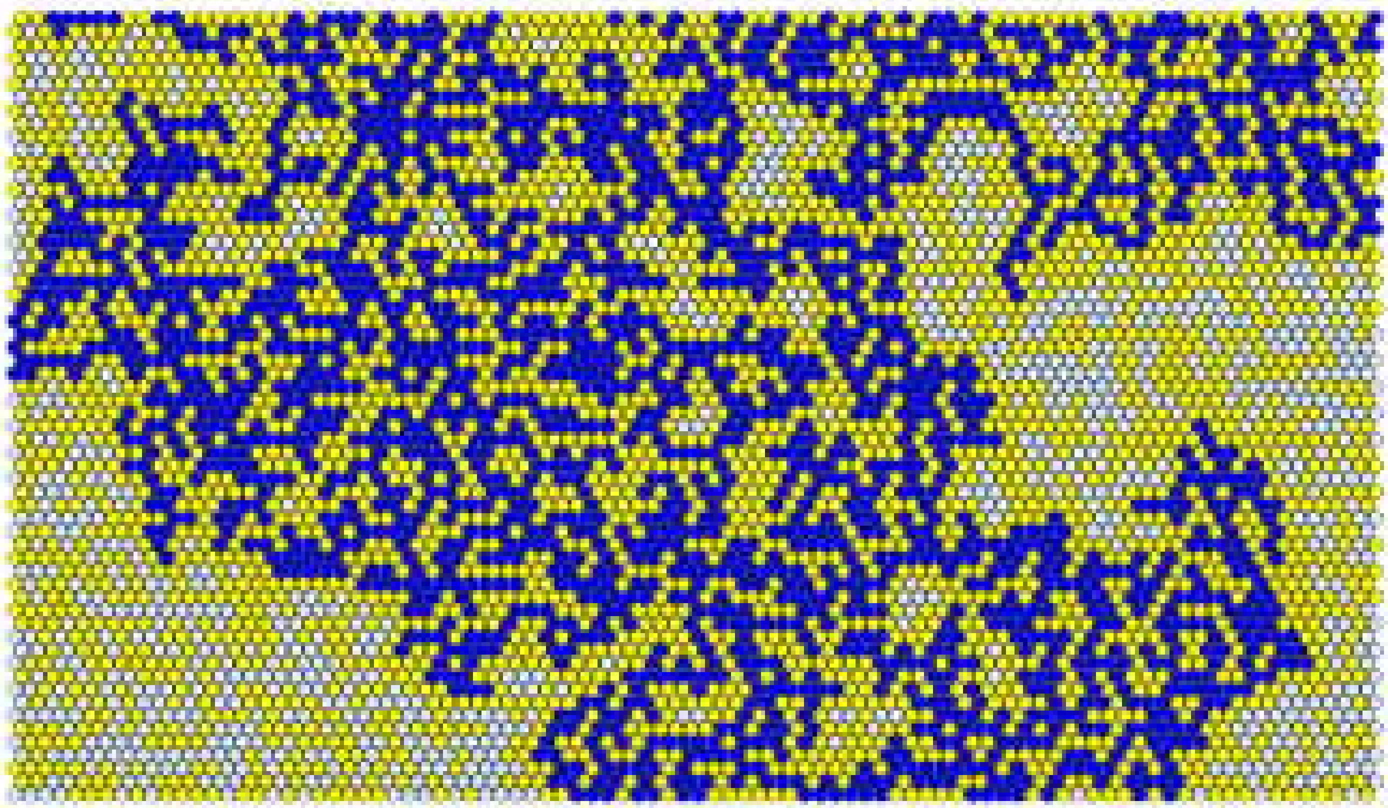
Fig. 23. Results of large cell renormalization for the triangular lattice, using b up to 10 000 (see Eschbach *et al.*, 1981). The b-dependent effective exponents y, determined from the width of the distribution function for the threshold, are plotted versus $1/\ln b$ (solid circles). A tangent on the values for large b has the 'true' $y = 1/\nu$ for infinite systems as intercept. These data are compatible with the intercept being $0 \cdot 75$, corresponding to the supposedly exact $\nu = 4/3$.

usando la ordenada al origen del fit lineal

$$\frac{1}{\nu} + \frac{C}{\ln b} = \frac{\ln(1/\Delta)}{\ln b}$$

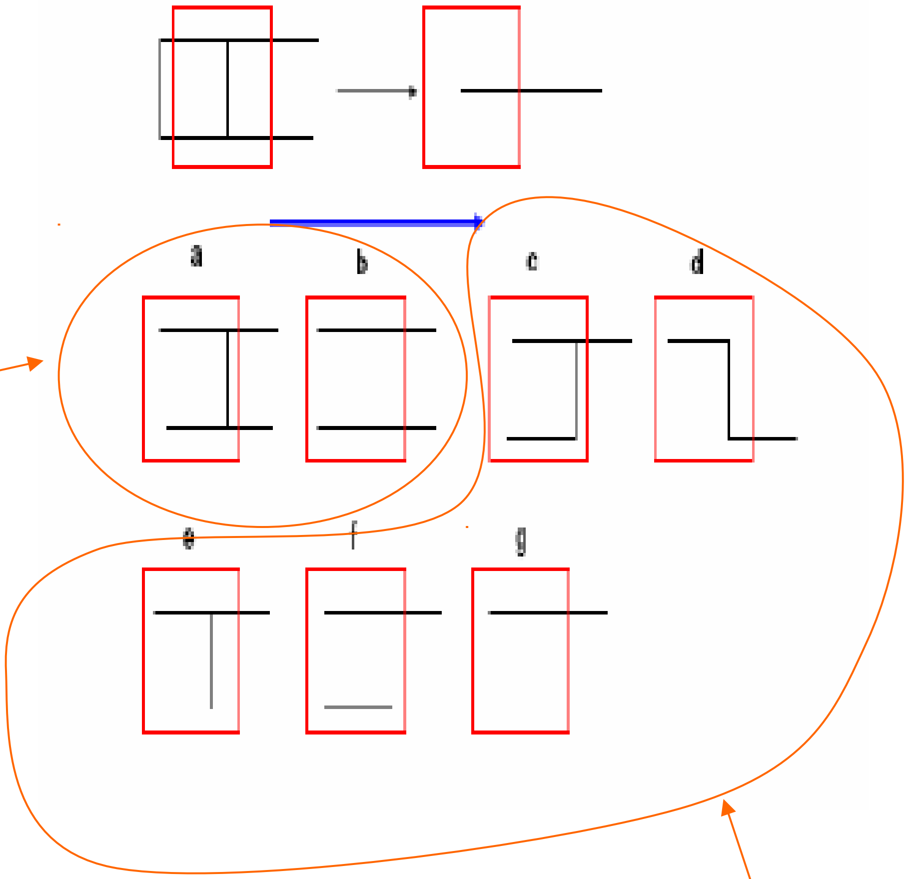
rescatamos entonces

$$\Delta = \exp(-C) b^{-1/\nu}$$



Recordemos el caso de percolacion de links en la red cuadrada

Conectada
fuertemente



debiles

Una propiedad del cluster percolante

Tenemos relaciones fuertes y relaciones débiles entre celdas

Es probable que existan muchos de estas conexiones simples

Son entonces las “mas debiles”

Es entonces apropiado pensar en que debe estar asociado con ν

Dado que viene de calcular el cluster en pc

Δαδο θυε ν ϖιενε δε χαλχυλαρ ελ χλυστερ εν πχ

Sea un parametro π que es la probabilidad de no remover un link del sistema

Dado que el cluster percolante en $\boldsymbol{p^*}$ es “muy tenue” debe romperse con $\boldsymbol{\pi<1}$ (es infinito…)

Por lo tanto $\boldsymbol{\pi=1}$ es el punto fijo de $\boldsymbol{\pi}$ en $\boldsymbol{p=p^*}$

Aplicamos renormalización y entonces escribimos

$$1-\pi' = \Lambda(1-\pi) + \Lambda_2(1-\pi)^2 + \ldots$$

$1-\pi'$ es la probabilidad de desconectar los lados de las celdas

$\Lambda(1-\pi)$ es entonces el el numero medio de celdas conectadas por un link simple multiplicado por la probabilidad de un link simple

$\Lambda = M_{sc}(b)$ Con sc "singly connected"

SI π se aleja de 1 es lo mismo que alejar p de p^* (lo rompemos)

$$\Delta = \left(\frac{d\pi'}{d\pi}\right)_{\pi^*} = \left(\frac{dp'}{dp}\right)_{p^*}$$

Por lo tanto

$$M_{sc}(b) = b^{1/\nu}$$

Luego el cluster percolante tiene links simples en todas las escalas