

Clase práctica 4

Determinación de p_c

Problema 1(c)

Estudie cómo se comporta la dispersión de los valores obtenidos de p_c (ver clases anteriores) en función del tamaño del sistema.

Solución

Este problema nos introduce en un aspecto central,

¿Podemos identificar el valor de p_c de un sistema infinito por medio de simulaciones sobre sistemas finitos?

Esta pregunta no sólo es relevante para el caso de *percolación*, sino para una multiplicidad de sistemas. Por ejemplo, este problema es análogo al de la transición ferromagnética, si cambiamos la diferencia $p - p_c$ por $T - T_c$ (T_c es la temperatura del punto de Curie) y P_∞ (intensidad del fragmento percolante) por la magnetización M .

Vamos a solucionar esta pregunta usando argumentos de *scaling* de sistemas finitos. Sabemos que si el sistema es infinito, la distribución de la probabilidad de percolación es $F(p) = 0$ para $p < p_c$ y $F(p) = 1$ para $p > p_c$. Como nuestro sistema es finito, el paso de $F(p) = 0$ a $F(p) = 1$ es gradual, y definimos un \mathcal{P}_c como hicimos en los problemas 1(a) y 1(b). Hacemos la siguiente suposición (hipótesis de *scaling*),

$$F(p) = \varphi\left[(p - p_c)L^{1/\nu}\right] \quad , \text{ o sea } \quad \frac{dF(p)}{dp} = L^{1/\nu} \varphi'\left[(p - p_c)L^{1/\nu}\right] \quad (4.1)$$

donde L es el lado de la red. Esta suposición tiene un sustento formal en la teoría de renormalización (de celda grande), donde se explota la idea de *auto-similaridad* del sistema.

Si calculamos \mathcal{P}_c como el valor medio de p , obtenemos,

$$\mathcal{P}_c = \int_0^1 p \frac{dF(p)}{dp} dp = p_c + \int_0^1 (p - p_c) \frac{dF(p)}{dp} dp = p_c + L^{-1/\nu} \int_{z_0}^{z_1} z \varphi'(z) dz \quad (4.2)$$

es decir, $\mathcal{P}_c - p_c = A L^{-1/\nu}$. Hay dos maneras de proceder a partir de acá. Por un lado, se puede graficar \mathcal{P}_c vs. $L^{-1/\nu}$ para distintos valores de ν . Se toma la recta que mejor ajusta de todos los casos y se determina p_c (para ν fijo).

Otro procedimiento es hacer un ajuste no lineal de los tres parámetros simultáneos p_c , ν y A . Este procedimiento es más riesgoso porque podríamos llegar a una combinación sub-óptima de los tres parámetros. En cualquier caso, es de esperar que $\nu \cong 4/3$ (según Stauffer).

Ejercicio: determinación de p_c y ν

A partir de los valores de \mathcal{P}_c hallados para distintos tamaños de red, determine p_c fijando $\nu = 4/3$. Haga lo mismo ajustando p_c , ν y A simultáneamente (por ejemplo, con la función `nlinfit` de `Matlab`). Compare los resultados.

Solución

Primero se varió p entre 0.59 y 0.61 para encontrar la región en donde la Ec. (4.2) se cumpla en el mayor rango posible de $\ln(L)$. Esto acotó la búsqueda de p_c y ν a la región $0.6019 < p_c < 0.6008$. A continuación se muestran los resultados obtenidos para $\nu \pm \Delta\nu$ y distintos valores de p_c (fijados de antemano). La columna L_{\max} señala el rango $5 \leq L \leq L_{\max}$ considerado para el ajuste. La ordenada al origen obtenida en cada ajuste no se muestra porque sólo estamos interesados en la pendiente $-1/\nu$. En general, los resultados muestran una incertidumbre del 10% (para un nivel de confianza del 95%).

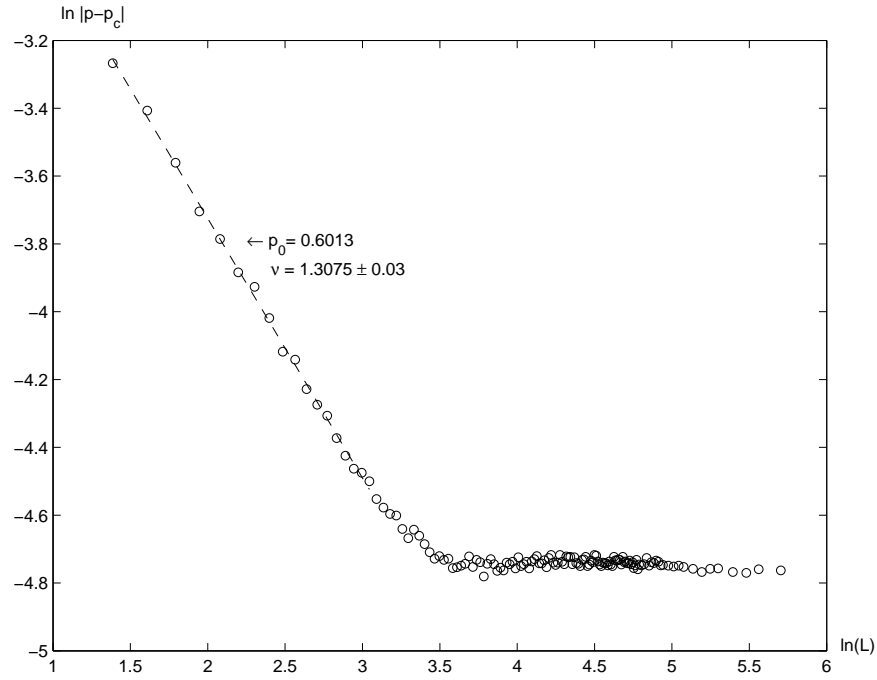


Figura 4.1: Determinación de p_c en función del lado de la red L . Se graficó el ajuste para $L_{\max} = 18$.

Lmax	nu	pc
10	1.3510 +/- 0.0641	0.6019
11	1.4329 +/- 0.0584	0.6035
12	1.4272 +/- 0.0499	0.6034
13	1.3628 +/- 0.0433	0.6022
14	1.3792 +/- 0.0388	0.6025
15	1.4076 +/- 0.0357	0.6030
16	1.4073 +/- 0.0321	0.6030
17	1.3614 +/- 0.0306	0.6022
18	1.3075 +/- 0.0297	0.6013
19	1.2948 +/- 0.0272	0.6011
20	1.2756 +/- 0.0251	0.6008

Observamos que, más allá de $L = 32$ la ley de potencias deja de ser válida y \mathcal{P}_c converge a un valor determinado (para $L = 300$ es 0.5927). Esto se debe a que la Ec. (4.2) deja de ser válida, dado que en la deducción se supuso que para $z = (p - p_c)L^{1/\nu} = 0$, $\varphi'(z)$ no es simétrica. Al ser cada vez más simétrica, la integral en la Ec. (4.2) se vuelve nula (ver Stauffer, p.73).

Clase práctica 5

Masa del fragmento percolante

Problema 4

Encuentre la masa M del cluster percolante para $p = p_c$ como función de L . Calcule la dimensión fractal involucrada.

Solución

Este problema nos introduce en la estructura del fragmento percolante. Consideramos la *masa* M como la cantidad de nodos que pertenecen al fragmento percolante, es decir, al fragmento de tamaño infinito (para redes infinitas). Este fragmento tiene un comportamiento fractal en $p = p_c$ y, por lo tanto, tiene una dimensión fractal D ,

$$M(L, p = p_c) \sim L^D \quad D < d \quad (5.1)$$

para redes muy grandes ($L \rightarrow \infty$). En redes bidimensionales ($d = 2$) la dimensión fractal es $D = 91/48 = 1,896$. Para $p < p_c$, la dimensión fractal es nula (no hay fragmento percolante) por lo que $M(L, p < p_c) \sim \ln(L)$ (observar que $M(L, p < p_c)/L^2 \rightarrow 0$). Cuando $p > p_c$, sigue un comportamiento similar al de fragmentos de tamaño finito. Su dimensión es la misma que la de la red, es decir, $M(L, p > p_c) \sim L^d$ ($d = 2$).

Las relaciones dadas para M se obtienen midiendo la cantidad de nodos que pertenecen al fragmento percolante cuando se toman *ventanas* de tamaño L de una red infinita y se tiende $L \rightarrow \infty$.

En realidad, en $p = p_c$ la magnitud que domina la red es la *longitud de correlación*, definida como la distancia media entre nodos pertenecientes a un mismo fragmento. En el punto crítico $p = p_c$, esta magnitud diverge como $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$. Esto significa que en ese único punto, en el cual $\xi \rightarrow \infty$, es dónde el fragmento percolante tiene dimensión fractal. Si nos apartamos un poco por encima de p_c , se observa que $M \sim L^D$ siempre que $L \ll \xi$. Es decir, el comportamiento de M está, en realidad, gobernado por ξ .

Los argumentos expuestos son independientes de la topología de la red. Sólo se sabe que son plenamente válidos para redes de $d < 6$. Para dimensiones mayores, la estructura es mucho más compleja.

Podemos estudiar las redes finitas a partir de estos argumentos. Queremos responder a la pregunta,

¿Cómo se comporta el tamaño del mayor fragmento como función de L (en redes L^d)?

La hipótesis de *scaling* demanda que,

$$M(L, \xi) = L^D m\left(\frac{L}{\xi}\right) \quad (5.2)$$

donde la función $m(x)$ es constante para $L < \xi$ y $m(x) = x^{d-D}$ cuando $x \gg 1$. Esto lleva a que $M \sim L^d$ cuando $L > \xi$.

¿Qué conclusiones sacamos de este análisis? Podemos obtener un procedimiento para hallar D (dimensión fractal) a partir del análisis anterior. Cuando *sintonizamos* el sistema en $p = p_c$, sabemos que $M(L, p = p_c)/L^d \sim L^{D-d}$. $D - d$ se puede obtener ajustando una recta en un gráfico logarítmico. Sin embargo, en nuestro sistema finito, el valor de p_c es estimado (ver clases anteriores). Si $p < p_c$ no obtendremos la recta deseada. Si $p > p_c$ pero $L > \xi$ (es decir, no estoy lo suficientemente cerca de p_c) obtendremos un comportamiento $M/L^d \sim L^{D-d}m(L/\xi)$. Por lo tanto, el procedimiento debe ser,

1. fijar distintos valores de p , procurando que estén apenas por encima de p_c
2. graficar M/L^d vs. L (escala logarítmica) para cada uno de los casos $p - p_c$
3. verificar en qué región nos encontramos ($L > \xi$ o $L < \xi$). Las curvas para $L < \xi$ deben ser paralelas.
4. hallar la pendiente $D - d$ en la región $L < \xi$ para cada curva.

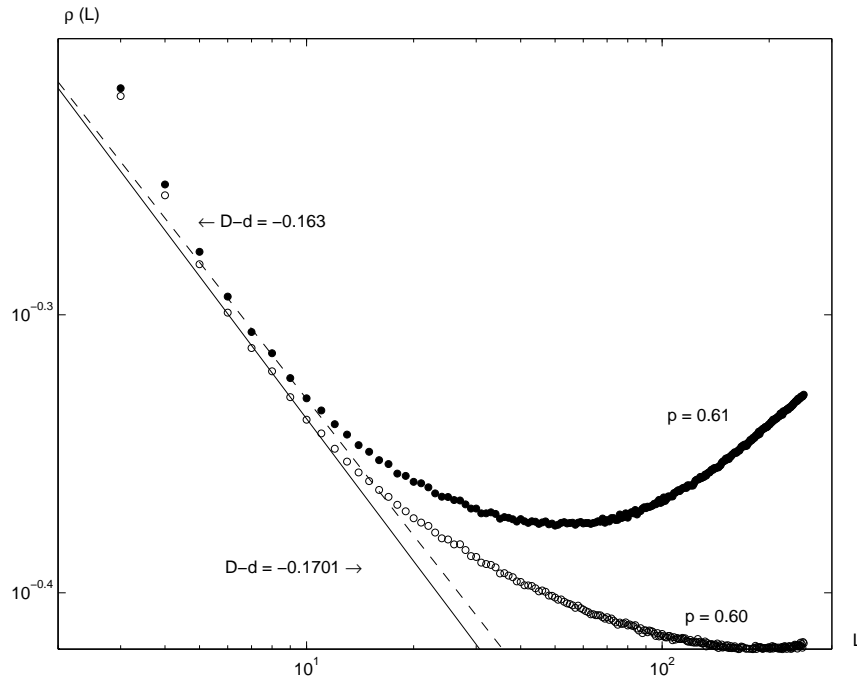


Figura 5.1: Determinación de $D - d$ en función del lado de la red L . Se graficó el ajuste para $4 \leq L \leq 7$. Los puntos negros corresponden a $p = 0,61$ y los blancos a $p = 0,60$.

Ejercicio: determinación de $D - d$

Realice el procedimiento anterior y determine el valor de la dimensión fractal.

Consideramos dos puntos por encima de p_c , por ejemplo $p = 0,60$ y $p = 0,61$. En la Figura 5.1 se hace un gráfico doble logarítmico de $\rho(L) = M/L^2$.

Observamos que a medida que nos alejamos de p_c el rango de ajuste para una recta se reduce. Esto se debe a la menor distancia de correlación. Para obtener la recta, se consideraron intervalos de L a $L + 3$ y se los compararon entre sí para ambas curvas. Las rectas graficadas corresponden a las pendientes más parecidas para las dos curvas. El valor promedio de las dos pendientes es $(0,17 + 0,163)/2 = 0,166$. Por lo tanto, la dimensión fractal es $D = d - 0,166 = 1,834$. Este valor tiene una discrepancia del 3,5% respecto del valor “teórico” (ver más adelante).