Clase práctica 7

Grupo de renormalización

Problema 7

a) Enumere las configuraciones percolantes para una celda $b = 2$.
Encuentre la relación de recursión correspondiente y los puntos fijos asociados.
Utilice diversos criterios de *percolación interna*. Encuentre p^* y ν.

b) Repita lo hecho en el punto anterior para una celda $b = 3$.

Solución

El concepto de *renormalización* significa explotar las ideas de autosimilaridad en el punto crítico. En ese punto, sabemos de $\xi \to \infty$, y que en un entorno del mismo, se sigue la ley libre de escalas $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$. Por lo tanto, si cambiamos de escala,

$$\xi' \sim |p^* - p_c|^{-\nu} \tag{7.1}$$

En el caso de que el cambio de escala se realice por agrupación de nodos en "supernodos" de lado b, las distancias de correlación se relacionan según $\xi' = \xi/b$. Es decir,

$$b\,|p^* - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu} \qquad , \qquad \frac{1}{\nu} = \frac{\ln[(p^* - p_c)/(p - p_c)]}{\ln b} \tag{7.2}$$

Si la renormalización es de celda pequeña (b chico), la relación entre p^* y p es fácil

de encontrar. Primero hay que elegir la ley de transformación que vamos a usar. Por ejemplo, si la ley es que p^* corresponde al caso de percolación vertical (u horizontal), tenemos que para $b = 2$,

$$p^*(p) = p^4 + 4\,p^3(1-p) + 2\,p^2(1-p)^2 \tag{7.3}$$

porque p^* percolará si sus cuatro nodos están "ocupados" (con probabilidad p^4), o si hay tres "ocupados" y uno "desocupado" ($4\,p^3(1-p)$), o bien se dan los dos casos posibles de percolación con dos nodos "ocupado" ($2\,p^2(1-p)^2$).

El punto crítico es el mismo en ambas escalas (debido al argumento de autosimilaridad), por lo que corresponde a un punto fijo de la Ec. (7.3). Es decir, $p^*(p) = p$ y reemplazando en la Ec. (7.3) resultan las raíces,

$$p_c = 0, \quad 1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{7.4}$$

Sabemos que $0 < p_c < 1$, así que sólo nos interesa el valor $(-1+\sqrt{5})/2 \approx 0,618$. Este valor es algo superior a la estimación 0,5927 debido a que el criterio usado para clasificar los "supernodos" no logra capturar las uniones *tenues* que se dan en el fragmento percolante. Por eso que el valor de p_c obtenido por renormalización es algo superior al verdadero.

Si hubiésemos usado (erróneamente) el criterio de "mayoría simple" para clasificar al supernodo, obtendríamos la relación,

$$p^*(p) = p^4 + 4\,p^3(1-p) \tag{7.5}$$

cuyas raíces para el punto fijo $p*(p) = p$ son 0, 1, $(1 \pm \sqrt{13})/6$. Sólo nos interesa el valor $(1+\sqrt{13})/6 \approx 0,768$. En este caso, p_c es mayor al calculado con el criterio anterior porque desconoce las uniones *tenues* que se dan cuando hay percolación con sólo dos nodos ocupados.

Las Ec. (7.2) permiten hallar el valor de ν. En una aproximación de primer orden tenemos que,

$$p^* - p_c \approx \left(\frac{dp^*}{dp}\right)_{p=p_c} (p - p_c) = 4\,p_c(1-p_c^2)\,(p-p_c) \tag{7.6}$$

para el caso del criterio de percolación. El valor de ν que se obtiene es 1,635.