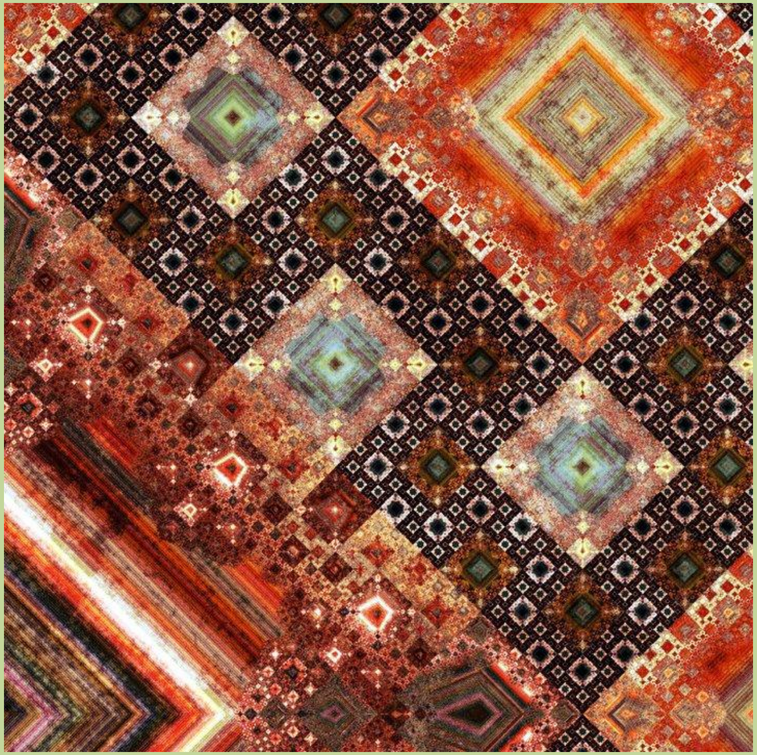
Fractales, renormalización y autosimilaridad



20 de Abril de 2021

En esta clase determinaremos la probabilidad crítica analizando como se agrupan los nodos.

Vamos a resolver este problema:

Problema 7: Grupo de renormalización

(a) Enumere las configuraciones percolantes para una celda $b = 2$. Encuentre la relación de recursión correspondiente y los puntos fijos asociados. Utilice diversos criterios de percolación interna y compare. Encuentre p y ν.

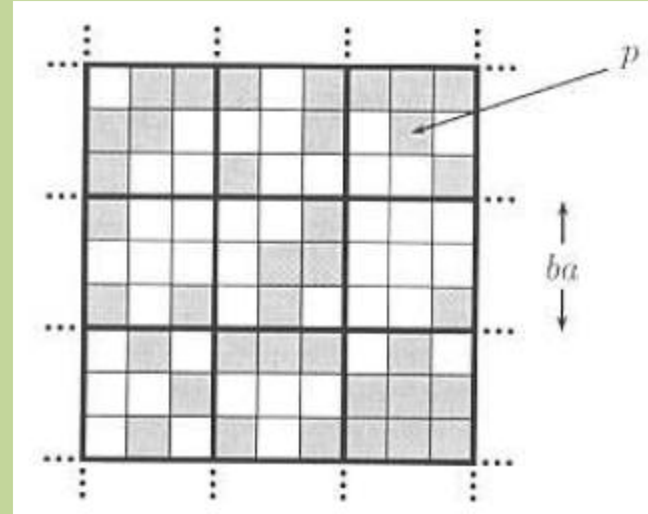
(b) Repita lo hecho en el punto anterior para una celda $b = 3$.

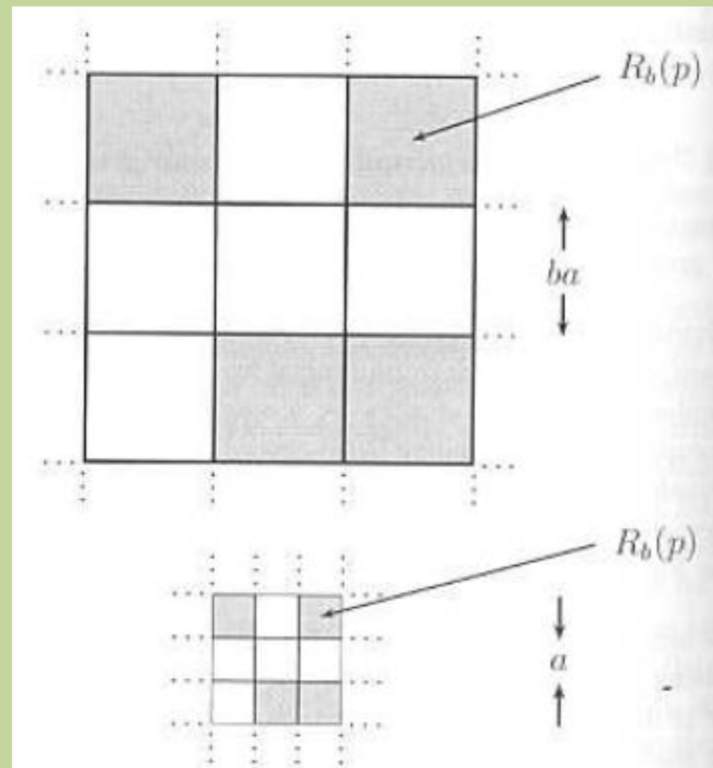
Vamos a transformar nuestro problema original en otro.

Reduciremos el tamaño del sistema original.

Estudiaremos qué tan "similar" es el nuevo sistema respecto al anterior.

El sistema reescaleado, ¿seguirá percolando?.

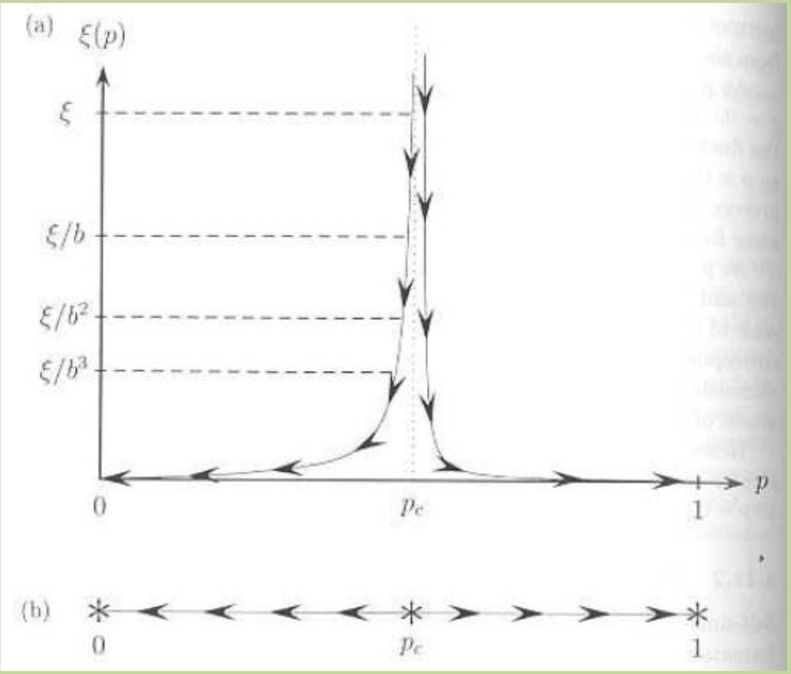




*Complexity and Criticality, página 88

Las cuentas...

$$\xi = constante\,|p - p_c|^{-\nu}$$



Cambiamos la escala un factor b

$$\frac{\xi}{b} = \frac{constante}{b}\,|p - p_c|^{-\nu} = constante\,|T_b(p) - p_c|^{-\nu}$$

Cambia porque estamos variando la longitud de correlación

***Complexity and Criticality, página 84**

Despejamos el exponente crítico

$$\nu = \frac{ln(b)}{ln\left(\frac{|T_b(p)-T_b(p_c)|}{|p-p_c|}\right)} \longrightarrow \nu = \frac{ln(b)}{ln\left(\frac{dT_b}{dp}|p_c\right)}$$

Ahora nos resta elegir una ley de transformación $T_b(p)$

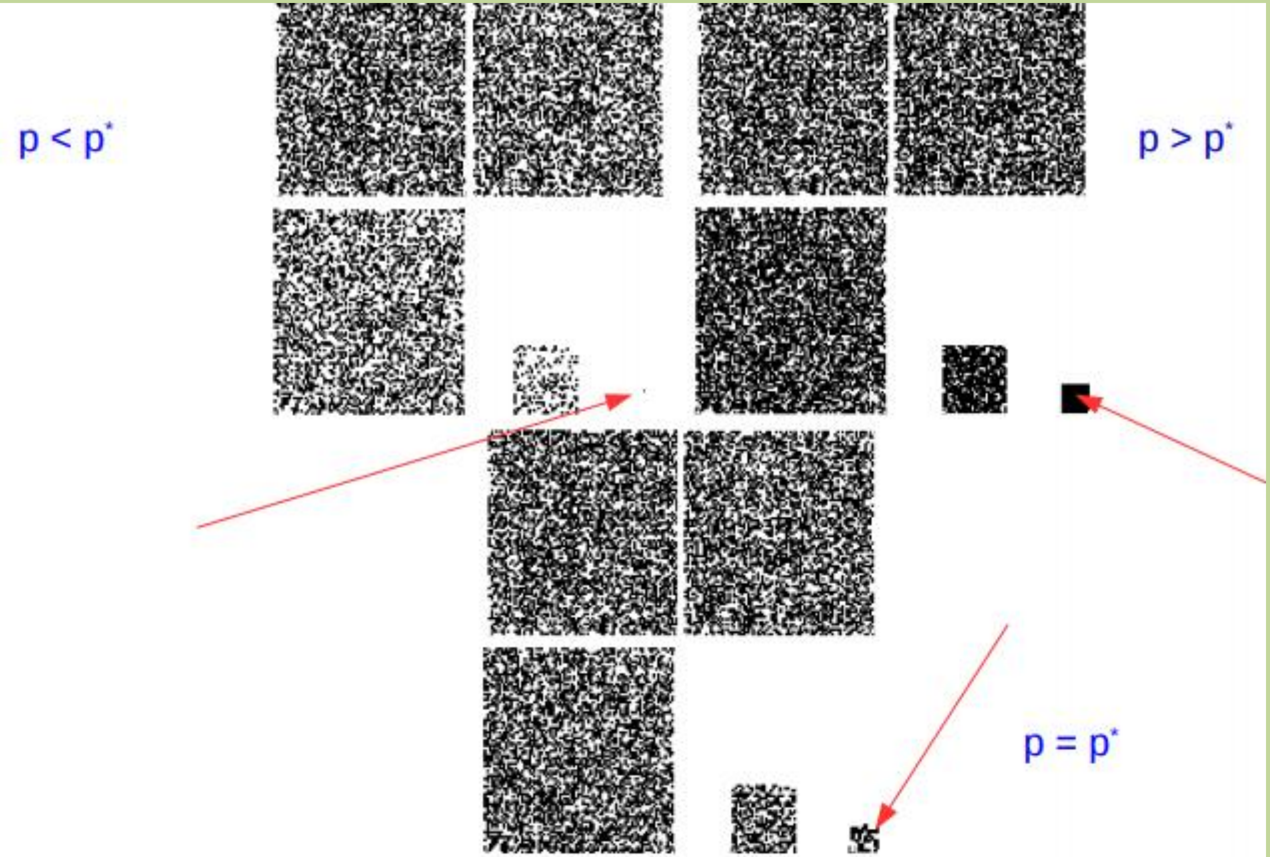


Figure 1.16: Renormalisation group method on a 2d square lattice according to the majority rule for 3×3 blocks. Shown are part of the original lattice $L = 729$ and the renormalised lattices $L = 243$ (part of), $L = 81, 27$, and 3. (a) Initial occupation probability $p < p^\star$ in the original lattice and the flow is towards the empty lattice. (b) Initial occupation probability $p > p^\star$ in the original lattice and the flow is towards the fully occupied lattice. (c) Initial occupation probability $p = p^\star$ in the original lattice. This is a fixed point for the renormalisation group transformation and consequently there is no flow. It looks like itself on all length scales.

***Percolation notes, página 36**

Ahora si, resolvamos el problema 7

Posibles configuraciones para una celda de 2x2:

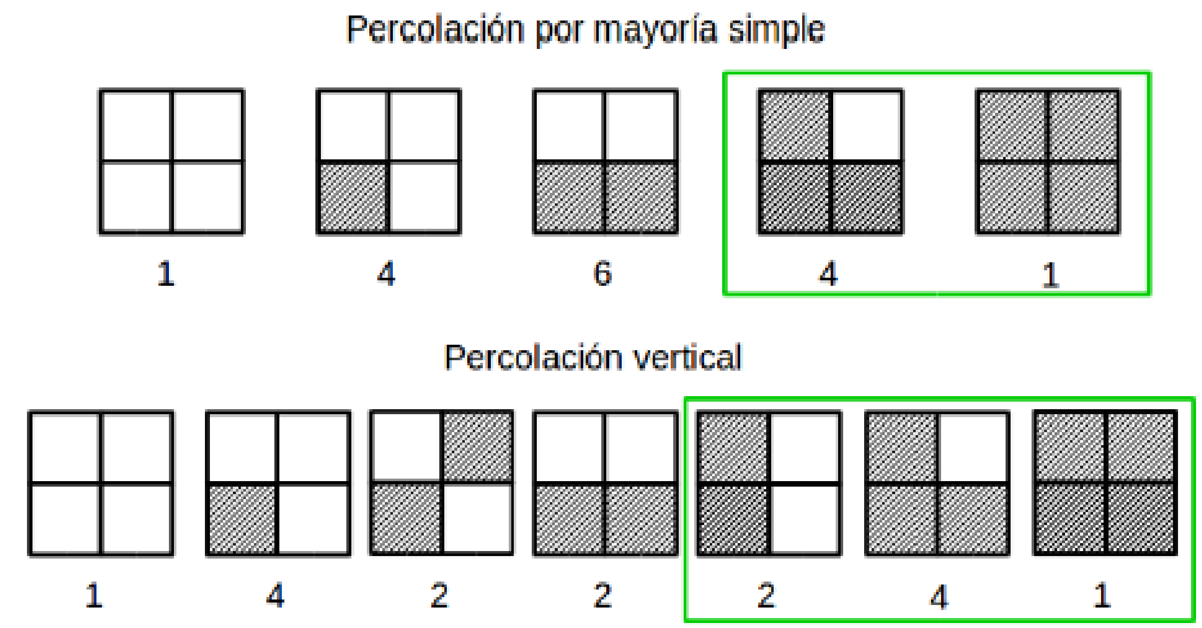
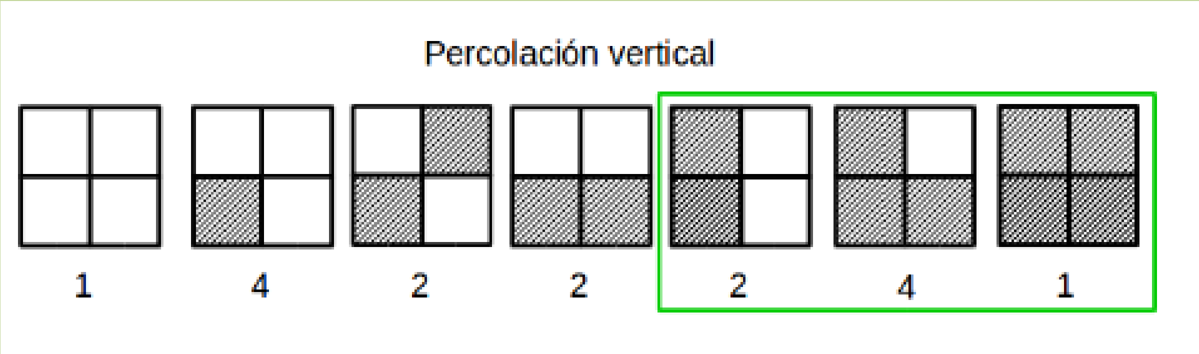
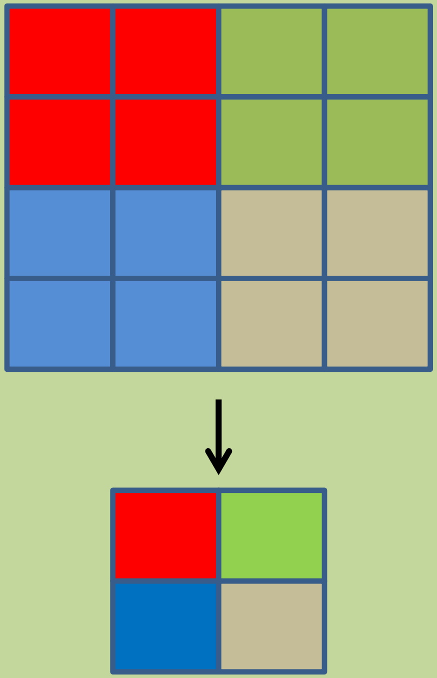


FIG. 11. Criterios de percolación interna (mayoría simple y percolación vertical). Debajo de cada configuración se indica la degeneración de la misma. Las configuraciones encerradas en rectángulos verdes son las que generan un *super nodo*.





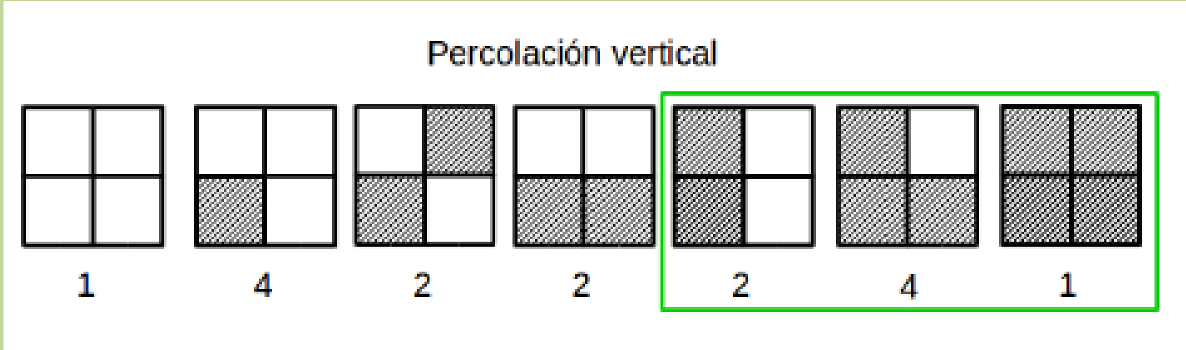
$$p' = p^4 + 4p^3(1-p) + 2p^2(1-p)^2$$

Probabilidad con la que voy a poblar un "super-nodo"

Reescribiendo

$$p' = 2p^2 - p^4$$

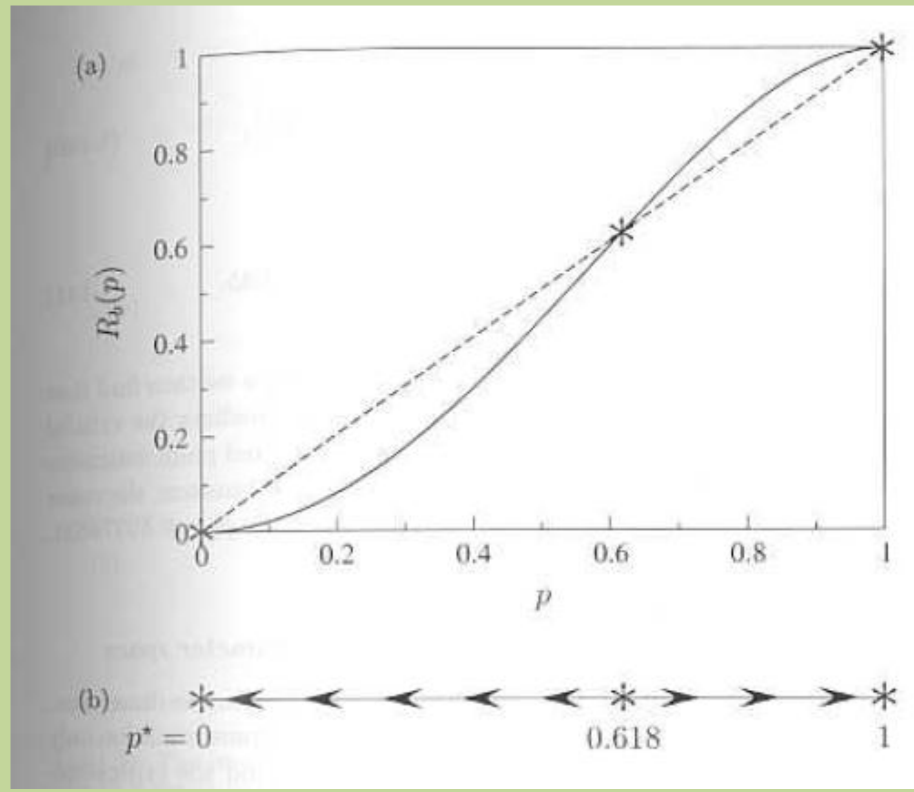
IMPORTANTE: El punto crítico es independiente de la escala que estoy usando (autosimilaridad). Por lo tanto, debo buscar el punto fijo de la ecuación anterior.



$$p_c = 2p_c^2 - p_c^4$$

Resolviendo

$$p_c = \begin{cases} 0 \\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \rightarrow \approx 0.618 \\ 1 \end{cases}$$



***Complexity and Criticality, página 99**

Con esto, podemos hallar el valor del exponente crítico

$$\nu = \frac{ln(b)}{ln(\frac{dT_b}{dp}|p_c)}$$

$$p' = p^4 + 4p^3(1-p) + 2p^2(1-p)^2$$

$T_b(p)$

$$p' = 2p^2 - p^4$$

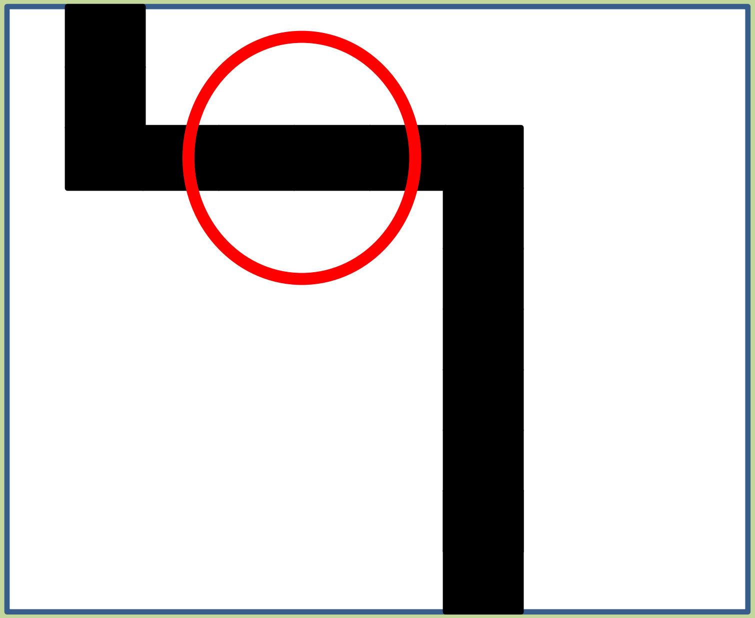
Resolviendo, obtenemos que $\nu \approx 1.635$

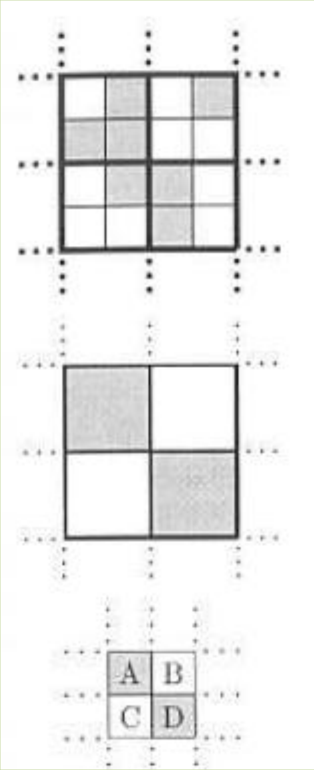
El valor teórico es $\nu = 4/3$

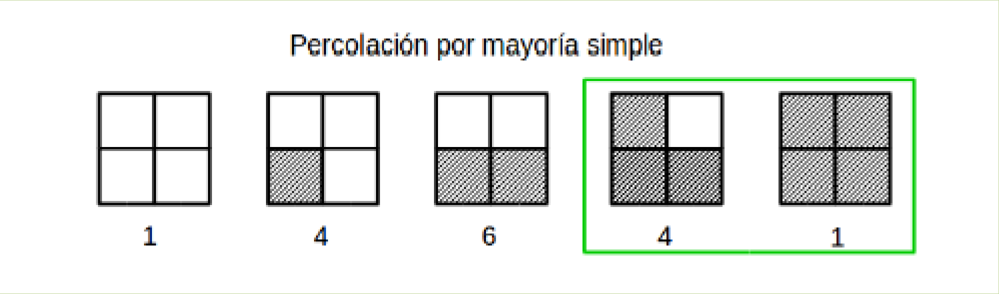
¿Por qué da diferente tanto p_c como el exponente crítico respecto a los valores teóricos?

Recordemos que el cluster percolante es “tenue”.

Los “links” son débiles. Si corto el adecuado, me quedo sin clúster percolante.







Haciendo lo mismo que antes obtenemos que

$$p_c = \begin{cases} 0 \\ \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} \approx 0.768(+) \\ 1 \end{cases} \qquad \nu \approx 1.397$$