Estimación de la correlación para $J = 0$

Suponemos que en cada inversión de spin existe una probabilidad de aceptación P_a. La distribución puede asimilarse a una Bernoulli

$$P = \begin{cases} P_a & \text{si} \quad \text{inversion} \\ \\ 1 - P_a & \text{si} \quad \text{no} - \text{inversion} \end{cases} \tag{1}$$

Probabilidad de ν inversiones de spin

Si las inversiones son independientes (porque $J = 0$), luego de k decisiones

$$p_k(\nu) = \left(\begin{array}{c} k \\ \nu \end{array} \right) P_a^{\nu} \, (1 - P_a)^{k-\nu} \qquad (2)$$

que es una distribución de tipo Binomial ($k = 0, ..., \nu$).

¿Qué ocurre si realizo muchas decisiones de inversión?

Supongamos una tasa de inversión $\lambda = P_a.k$ cuando $k \to \infty$ y $P_a \to 0$.

$$p(\nu) \approx \frac{\lambda^\nu}{\nu!} e^{-\lambda} \quad , \quad \nu = 0, ..., \infty \tag{3}$$

Esto nos sirve para calcular la probabilidad de obtener $P(s_{i+k}/s_i)$ para hallar la correlación de spines.

Probabilidades $P(s_{i+k}/s_i)$

- Si en el intervalo k hubo un número par de incersiones:

$$P_{\text{par}} = \sum_{\nu=0}^{k\to\infty} \frac{\lambda^{2\nu}}{2\nu!}\, e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\, \cosh(\lambda) \qquad (4)$$

- Si en el intervalo k hubo un número impara de incersiones:

$$P_{\text{impar}} = \sum_{\nu=1}^{k\to\infty} \frac{\lambda^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}\, e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\, \sinh(\lambda) \qquad (5)$$

- Observar que un número par de inversiones deja todo igual $s_{i+k} = s_i$. Un número impar de inversiones deja $s_{i+k} = -s_i$.

- $P(+1/+1) = P(-1/-1) = e^{-\lambda} \cosh(\lambda)$
- $P(-1/+1) = P(+1/-1) = e^{-\lambda} \sinh(\lambda)$

Cáculo de la correlación

$$C(k) = \frac{\langle s_i \cdot s_{i+k} \rangle - \langle s_i \rangle^2}{\langle s_i^2 \rangle - \langle s_i \rangle^2} \tag{6}$$

donde

$$\langle s_i \cdot s_{i+k} \rangle = \sum_{s_i, s_{i+k}} s_i \cdot s_{i+k} \cdot P(s_i, s_{i+k}) \tag{7}$$

donde

$$P(s_i, s_{i+k}) = P(s_{i+k}/s_i) \cdot P(s_i) \tag{8}$$

Correlación

$$P(s_i, s_{i+k}) = \frac{e^{-\lambda}}{2\cosh(B)} \begin{pmatrix} e^{B}\cosh(\lambda) & e^{B}\sinh(\lambda) \\ e^{-B}\sinh(\lambda) & e^{-B}\cosh(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Si usamos estos resultados obtenemos

$$\langle s_i \cdot s_{i+k} \rangle = e^{-2\lambda} \quad , \quad \langle s_i^2 \rangle = 1 \quad , \quad \langle s_i \rangle = \tanh(B) \qquad (10)$$

Correlación

$$C(k) = \frac{e^{-2\lambda} - \tanh^2(B)}{1 - \tanh^2(B)} \tag{11}$$

Si $B \to 0$ la $\tanh^2(B) \to 0$. $C(k) \approx e^{-2\lambda} = e^{-2k/L^2}$.

Si $B \to \infty$ la $\tanh^2(B) \to 1$.

$$C(k) \approx 1 - \frac{2\lambda}{1 - \tanh^2(B)} + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{12}$$

Si pido que $C(k) \approx 0$ entonces $2\lambda \approx 1 - \tanh^2(B) \approx 0$.