Modelo de Ising con $J^* \neq 0$

Red de spines $s = \pm 1$ en un arreglo $L \times L$.

$$\mathcal{H} = -J^* \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \, s_j - B^* \sum_i s_i \tag{1}$$

donde $J^* = J/KT$ y $B^* = B/KT$.

Solución teórica de Onsager

Para una red de spines de tamaño $N \to \infty$.

$$\langle s_i \rangle = \left.\frac{\langle M \rangle}{N}\right|_{B\to 0} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad J^* < J^*_c \\ \left[1 - \sinh^{-4}(2J^*)\right]^{1/8} & \text{si} \quad J^* > J^*_c \end{cases} \tag{2}$$

Aparece un punto crítico en $J^* = J*_c$.

$$2\,\tanh^2(2J^*) = 1 \quad \Rightarrow \quad J^* = \frac{1}{2}\,\ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.44 \tag{3}$$

Funciones respuesta

Respuesta del sistema (magnetización o energía) ante estímulos.

- Capacidad calorífica por spin

$$C^* = \frac{1}{KN} \frac{\partial U}{\partial T}\bigg|_{B\to 0} = \langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2 \bigg|_{B\to 0} \tag{4}$$

- Susceptibilidad magnética

$$\chi\bigg|_{B\to 0} = \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial B}\bigg|_{B\to 0} = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \tag{5}$$

Comportamiento cercano al punto crítico J^*

$$C^* \sim \ln\left|\frac{J^* - J_c^*}{J_c^*}\right| \sim \ln\left|1 - \frac{T}{T_c}\right| \tag{6}$$

$$\frac{\langle M \rangle}{N} \sim \left[1 - (T^*)^4\right]^{1/8} \sim (T_c - T)^{1/8} \tag{7}$$

Relación con los exponentes críticos α, β, γ

- Las fluctuaciones de energía están vinculadas con el exponente α

$$C^* \sim \left| T - T_c \right|^{-\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \tag{8}$$

- La magnetización es un parámetro de orden

$$\frac{\langle M \rangle}{N} \sim (T_c - T)^{\beta} \tag{9}$$

- La suceptibilidad magnética se asocia al exponente γ

$$\frac{\chi}{N} \sim \left| T - T_c \right|^{-\gamma} \tag{10}$$

Relación entre exponentes críticos

- Sabemos que $\alpha = 0$ y $\beta = 1/8$.

- Relación de Rushbrooke:

$$\alpha + 2\,\beta + \gamma = 2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{7}{4} \approx 1.75 \tag{11}$$

- Relación de Josephson:

  Según la teoría de percolación $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$, y ahora $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$ (y también dimensión $d = 2$)

$$\nu\, d = 2 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \nu = 1 \tag{12}$$

Coeficiente crítico dinámico

La cantidad de pasos de descorrelación τ es del orden de L^2. Pero en una red finita $\xi \to L^D$. Entonces

$$\tau \sim \xi^{2D} = \xi^z \quad , \quad z > 2 \tag{13}$$

z es el coeficiente crítico dinámico. Para Ising se estima $z \approx 2.16$.

En general, se verifica que $\tau \sim \chi$

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma} = |T - T_c|^{-\nu\gamma/\nu} = \xi^{\gamma/\nu} \tag{14}$$

Observamos que $z \geq \gamma/\nu$. En percolación $\gamma/\nu = (2D - d)$.