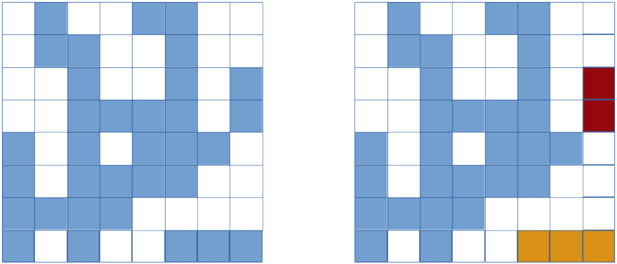
Distancia de correlación



- Habíamos visto que

$$p_c(L) - p_c(\infty) = A\, L^{-1/\nu} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad |p_c(L) - p_c(\infty)|^{-\nu} = A_0^{-\nu}\, L \sim L \tag{2}$$

Distancia de correlación

- ¿Se podrá generalizar la relación anterior?

$$\Rightarrow \quad |p - p_c(\infty)|^{-\nu} \sim \xi \tag{3}$$

- ξ es una "distancia característica" o "distancia de correlación"
- ξ representa la distancia media entre nodos perteneciente a un mismo fragmento. (ver definición formal en Sauffer pág. 59-60)
- Highlight: Si $p \to p_c(\infty)$ aparece el cluster percolante,

$$\Rightarrow \xi \to \infty$$

Análisis del cluster percolante

Hay dos análisis posibles del cluster percolante:

(a) Calculamos su masa (nro. nodos del cluster$/L^2$) como función de la probabilidad de ocupación p. Esto es la intensidad cluster percolante

(b) Calculamos su masa como función del tamaño de la red L. Esto es estrictamente la masa cluster percolante

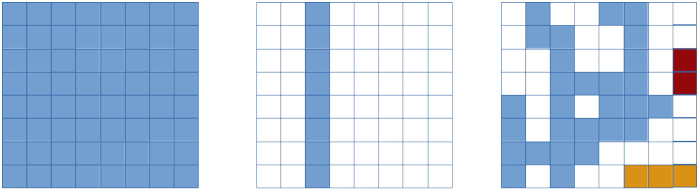
Sabemos que la masa del cluster percolante debe ser

$$M(L, p = p_\infty) \sim L^D \tag{4}$$

donde D es la dimensión fractal. Debe estar acotada entre $1 < D < 2$. Su valor teórico es $D = 91/48$.

Masa del cluster percolante para red infinita $d = 2$

Recordemos que $d = 2$ es la dimensión del sistema. D es la dimensión fractal (porque el cluster percolante representa un "fractal").



D=2 D=1 D=91/48

Masa del cluster percolante para red infinita $d = 2$

- Si $p < p_c(\infty)$ entonces

$$\lim_{L\to\infty} \frac{M}{L} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M \sim \ln(L)$$

- Si $p = p_c(\infty)$ entonces

$$\lim_{L\to\infty} \frac{M}{L^D} = \mathrm{cte}$$

- Si $p > p_c(\infty)$ entonces

$$\lim_{L\to\infty} \frac{M}{L^d} = \mathrm{cte}$$

Masa del cluster percolante para red finita $L = \infty$

Si la red es finita, el cluster percolante queda "truncado". Hay varias posibilidades para $p > p_c(\infty)$.

- Si $L > \xi$ nada cambia porque la "ventana de observación" es aún muy grande. Entonces, $M \sim L^d$ como ocurre con la red infinita.
- Si $L < \xi$ la "ventana de observación" se ve pequeña respecto de ξ. Daría la impresión de que el sistema percoló recientemente. Entonces, $M \sim L^D$.

Resumiendo

$$M(L,\xi) = L^D\, m(L/\xi) = L^D \begin{cases} \mathrm{cte} & L < \xi \\ (L/\xi)^{d-D} & L \gg \xi \end{cases} \tag{5}$$

Determinación de la dimensión fractal D

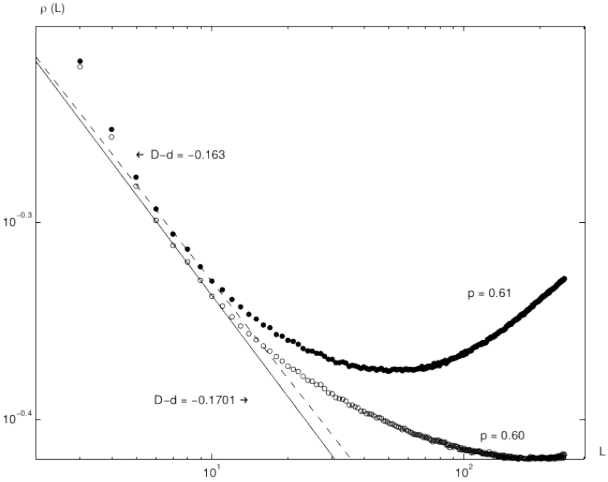
Definimos la densidad del cluster percolante:

$$\rho(L) = \frac{M}{L^2} = L^{D-2}\, m(L/\xi) \tag{6}$$

$$\ln \rho = (D-2)\, \ln(L) + \ln \left[m(L/\xi) \right] \tag{7}$$

- Vemos que hay dos regímenes: uno para $L < \xi$ y otro para $L \gg \xi$.

Determinación de la dimensión fractal D



- Puedo buscar dos “rectas paralelas” y determinar $D = d = D - 2$.

Comparación con otros exponentes críticos

- Intensidad del cluster percolante $P_\infty = (p - p_c)^\beta$.

$$P_\infty = \frac{M}{L^d} = \frac{L^D}{L^d} \tag{8}$$

- Si estoy cerca de $p_c(L)$ entonces

$$\left[(p - p_c)^{-\nu}\right]^{D-d} \sim L^{D-d} \quad \Rightarrow \quad L^{D-d} \sim (p - p_c)^{\nu(d-D)} \tag{9}$$

- Si comparamos ambos: $\beta = \nu\,(d - D)$

Comparación con exponente β