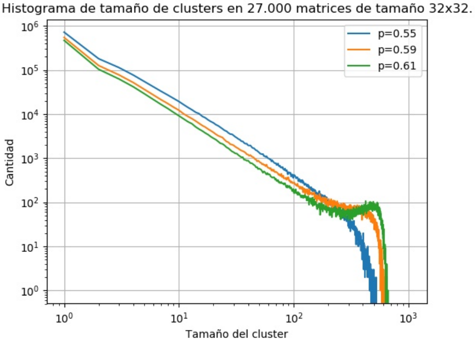
La distribución de fragmentos "revisited"

- En el problema 1(d) observamos que $n_s(p_c) = q_0\, s^{-\tau}$



- Esto es estrictamente válido en la red infinita. Para la red finita hacemos la siguiente hitótesis de "scaling finito"

$$n_s(p) = q_0\, s^{-\tau}\, f(z) \tag{1}$$

¿Quién es $f(z)$? ... (¿y z?)

- $f(z)$ es la "función de scaling" y mide cuánto nos apartamos de la distribución crítica.

$$f(z) = \frac{n_s(p)}{q_0\, s^{-\tau}} = \frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} \tag{2}$$

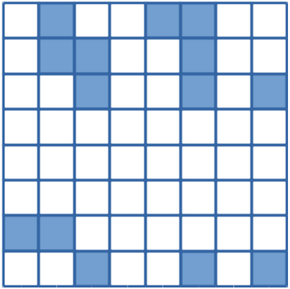
- Evidentemente, esto dependerá de la distancia $p - p_c$ y del tamaño de los fragmentos s (observar que ambos figuran en la expresión anterior). Definimos

$$\epsilon = \frac{p - p_c}{p_c} \quad \Rightarrow \quad z = z(s, \epsilon) \tag{3}$$

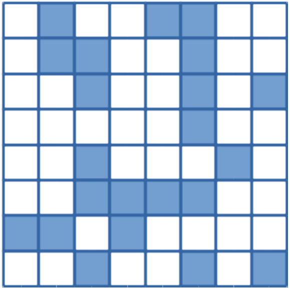
¿Quién es $f(z)$? ... (¿y z?)

- Como $f(s, \epsilon = 0) = 1$ es razonable pensar que $z = g(s).\epsilon$.
  Spoiler alert: vamos a determinar que $g(s) \sim s^{\sigma}$.

- ¿Qué esperamos que suceda con $f(z)$ en un entorno de p_c?



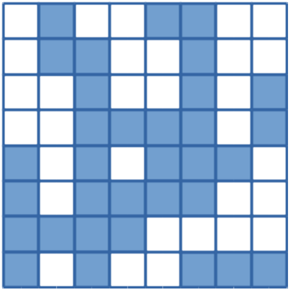
$p \ll p_c$



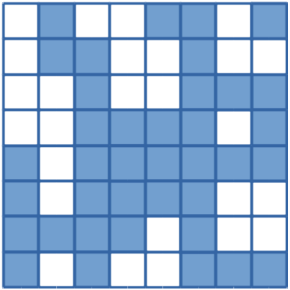
$p < p_c$

El número de fragmentos crece hasta un máximo $p_{\max} < p_c$.

¿Quién es $f(z)$? ... (¿y z?)



$p \approx p_c$



$p \gg p_c$

El número de fragmentos decrece luego de $p_{\max} < p_c$.

- Vemos que hay una cierta probabilidad $p_{\max}$ tal que el número de fragmentos es máximo.

$$f\left(g(s), p_{\max}\right) = f_{\max} \tag{4}$$

Resumiendo $f(z)$

- Sabemos que $f(z)$ tiene un máximo que corresponde a la probabilidad de "máxima producción de fragmentos" $p_{\max} < p_c$. Sabemos, además, que $f(0) = 1$.

- Como $f(z_{\max}) = f_{\max}$ entonces $\epsilon_{\max} = z_{\max}\, g^{-1}(s)$

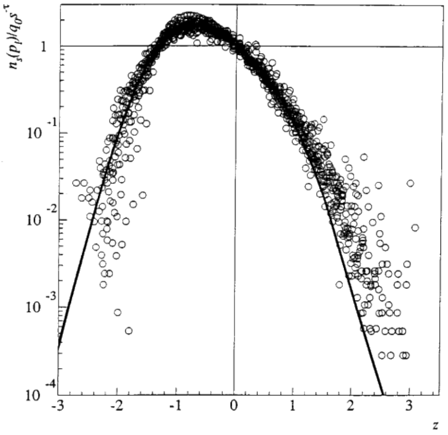
  1. Considero fragmentos de tamaño fijo, por ejemplo $s = 10$.
  2. Varío la probabilidad p en un entorno de p_c y calculo $n_{10}(p)/n_{10}(p_c)$. Cuando este cociente es máximo, anoto el valor $p_{\max} = p(10)$.
  3. Repito este procedimiento para $s = 11, 12, ...$
  4. Grafico $p_{\max} - p_c$ vs. s en escala log-log. Si lodo salió bien, obtengo una recta y determino $g^{-1}(s) = s^{-\sigma}$.

¿Cómo sé cuánto vale p_c?

- Recordemos que estamos trabajando con "scaling finito", así que $p_c = p_c(L)$.
- $p_c(L)$ lo obtuve en el problema 1. Sin embargo, puede tener incertidumbre, sobre todo porque $q_0 = q_0(\tau)$.
- Para asegurarme de que estoy en el valor de $p_c(L)$ "correcto", pruebo de graficar la función de scaling $f(z)$ (luego de hallar σ y obtener $z = s^{\sigma}\,\epsilon$!).

y si eso no funciona....

Función de scaling finito $f(z)$



Atención:

- El eje vertical está en escala log.
- Si $p_c(L)$ es incorrecto, vería una curva más borrosa. Puedo "ajustar" $p_c(L)$ un poco para obtener una curva más "limpia".

Relaciones de scaling conocidas hasta el momento

- $\tau = 1 + \frac{d}{D} = 1 + \frac{2}{91/48} \approx 2.0549$
- $\sigma = \frac{1}{D\nu} = \frac{48 \times 3}{91 \times 4} \approx 0,3956$
- $\beta = \frac{\tau - 2}{\sigma} \approx 0,138$
- $\beta = \nu\,(d - D)$

Apéndice: Nota sobre la dependencia de $q_0 = q_0(\tau)$

La probabilidad de ocupación es:

$$p = \sum_{s=1}^{\infty} n_s(p)\, s \tag{5}$$

Entonces, evaluendo en $p = p_c$:

$$p_c = \sum_{s=1}^{\infty} n_s(p_c)\, s = \sum_{s=1}^{\infty} q_0\, s^{-\tau}\, s \tag{6}$$

despejando:

$$q_0 = p_c / \sum_{s=1}^{\infty} s^{1-\tau} = p_c / \zeta(\tau - 1) \tag{7}$$