

# Clase 13

Martes 20/10/2020

La clase pasada vimos:

\* Relación de la **función de Green** de una partícula con observables físicos:

El espectro de excitación del sistema: **Representación de Lehmann**

\*\* **Funciones espectrales**



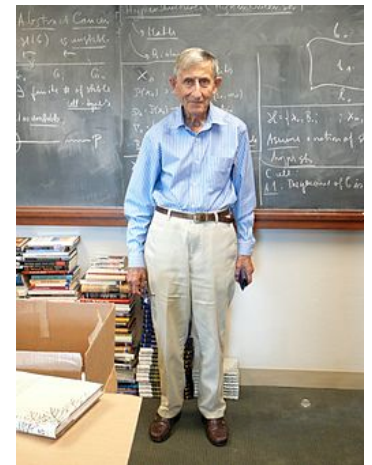
Harry Lehmann  
(1924-1998)

## Hoy vemos:

\* Estructura analítica de la función de Green

\*\* Función de Green y matriz densidad

\*\*\* Picture de Interacción - Serie de Dyson



Freeman Dyson en 2007  
1923-2020

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \left\{ \sum_n \frac{|\langle \Psi_n^{(N+1)}(\mathbf{k}) | c_{\mathbf{k}}^\dagger | \Psi_0 \rangle|^2}{\omega - \mu - w_{n,\mathbf{k}}^{(N+1)} + i\eta} + \sum_n \frac{|\langle \Psi_n^{(N-1)}(-\mathbf{k}) | c_{\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle|^2}{\omega - \mu + w_{n,-\mathbf{k}}^{(N-1)} - i\eta} \right\}$$

Representación de Lehmann

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty d\epsilon \left[ \frac{A(\mathbf{k}, \epsilon)}{\omega - \mu - \epsilon + i\eta} + \frac{B(\mathbf{k}, \epsilon)}{\omega - \mu + \epsilon - i\eta} \right]$$

REPASO

$$A(\mathbf{k}, \epsilon) = \sum_n \frac{|\langle \Psi_n^{(N+1)}(\mathbf{k}) | c_{\mathbf{k}}^\dagger | \Psi_0 \rangle|^2}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \delta(\epsilon - w_{n,\mathbf{k}}^{(N+1)})$$

$$B(\mathbf{k}, \epsilon) = \sum_n \frac{|\langle \Psi_n^{(N-1)}(-\mathbf{k}) | c_{\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle|^2}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \delta(\epsilon - w_{n,-\mathbf{k}}^{(N-1)})$$

} Funciones Espectrales

## Estructura analítica de la función de Green

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x_0 \pm i\eta} = P \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi\delta(x - x_0)$$

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left\{ - \int_0^\infty d\epsilon \frac{A(\mathbf{k}, \epsilon)}{\epsilon - (\omega - \mu) - i\eta} + \int_0^\infty d\epsilon \frac{B(\mathbf{k}, \epsilon)}{\epsilon - (\mu - \omega) - i\eta} \right\}$$

$$= \underbrace{P \int_0^\infty d\epsilon \frac{A(\mathbf{k}, \epsilon)}{\omega - \mu - \epsilon} + P \int_0^\infty d\epsilon \frac{B(\mathbf{k}, \omega)}{\omega - \mu + \epsilon}}_{\text{Re } G(\mathbf{k}, \omega)} \underbrace{-i\pi A(\mathbf{k}, \omega - \mu) + i\pi B(\mathbf{k}, \mu - \omega)}_{i \text{ Im } G(\mathbf{k}, \omega)}$$


Recordar que  $A$  y  $B$  son reales

# Estructura analítica de la función de Green

$$\text{Im} G(\mathbf{k}, \omega) = -\pi A(\mathbf{k}, \omega - \mu) + \pi B(\mathbf{k}, \mu - \omega)$$

$$= \begin{cases} -\pi A(\mathbf{k}, \omega - \mu) & \omega > \mu \\ +\pi B(\mathbf{k}, \mu - \omega) & \omega < \mu \end{cases}$$

cambia de signo en  $\omega = \mu$



$$A(\mathbf{k}, \epsilon) = 0 = B(\mathbf{k}, \epsilon) \text{ for } \epsilon < 0$$

Despejando A y B tenemos:

$$A(\mathbf{k}, \epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G(\mathbf{k}, \epsilon + \mu)$$

$$B(\mathbf{k}, \epsilon) = +\frac{1}{\pi} \text{Im} G(\mathbf{k}, \mu - \epsilon)$$

Reemplazando en:  $\text{Re } G(\mathbf{k}, \omega) = P \int_0^\infty d\epsilon \frac{A(\mathbf{k}, \epsilon)}{\omega - \mu\epsilon} + P \int_0^\infty d\epsilon \frac{B(\mathbf{k}, \epsilon)}{\omega - \mu + \epsilon}$

→  $\text{Re } G(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_0^\infty d\epsilon \frac{\text{Im } G(\mathbf{k}, \epsilon + \mu)}{\omega - \mu - \epsilon} + \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty d\epsilon \frac{\text{Im } G(\mathbf{k}, \mu - \epsilon)}{\omega - \mu + \epsilon}$

$$\epsilon_{\text{new}} = \mu + \epsilon_{\text{old}}$$

$$\epsilon_{\text{new}} = \mu - \epsilon_{\text{old}}$$

$$\text{Re } G(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_\mu^\infty d\epsilon \frac{\text{Im } G(\mathbf{k}, \epsilon)}{\omega - \epsilon} + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^\mu d\epsilon \frac{\text{Im } G(\mathbf{k}, \epsilon)}{\omega - \epsilon}$$

Relación de dispersión

Supongamos que calculamos una función de Green *aproximada*.

Puede ocurrir que no tenga la estructura analítica correcta, por ejemplo que no se satisfaga la relación de dispersión:

$$\operatorname{Re} G(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} d\epsilon \frac{\operatorname{Im} G(\mathbf{k}, \epsilon)}{\omega - \epsilon} + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\mu} d\epsilon \frac{\operatorname{Im} G(\mathbf{k}, \epsilon)}{\omega - \epsilon}.$$

Podríamos reemplazar la función de Green acá:

$$A(\mathbf{k}, \epsilon) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} G(\mathbf{k}, \epsilon + \mu) \qquad B(\mathbf{k}, \epsilon) = +\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} G(\mathbf{k}, \mu - \epsilon)$$

Y recalculamos: 
$$\operatorname{Re} G(\mathbf{k}, \omega) = P \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{A(\mathbf{k}, \epsilon)}{\omega - \mu\epsilon} + P \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{B(\mathbf{k}, \epsilon)}{\omega - \mu + \epsilon}$$

y así se satisface *por construcción* la relación de dispersión

# Operadores densidad

Los operadores densidad tienen valores de expectación que corresponden a la densidad de partículas. En el problema de **una partícula** tenemos:

$$\rho_\nu(\mathbf{x}) = \varphi_\nu^*(\mathbf{x})\varphi_\nu(\mathbf{x}) = \langle \nu | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | \nu \rangle$$

Operador densidad  
posibles definiciones

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) \equiv |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}| \longrightarrow \langle \nu | \hat{\rho}(\mathbf{x}) | \nu \rangle = \langle \nu | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | \nu \rangle$$

$$\hat{n}_\nu \equiv |\nu\rangle\langle\nu| \longrightarrow \langle \mathbf{x} | \hat{n}_\nu | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} | \nu \rangle \langle \nu | \mathbf{x} \rangle$$



# Operadores densidad

En la representación de espín-posición:

$$\begin{aligned}\langle x'_1 | \hat{\rho}(x) | x_1 \rangle &= \langle x'_1 | x \rangle \langle x | x_1 \rangle \\ &= \delta(x'_1 - x) \delta(x - x_1) \\ &= \delta(x - x_1) \delta(x'_1 - x_1)\end{aligned}$$

A menudo escribimos:  $\hat{\rho}(x) = \delta(x - x_1)$

# Operadores densidad

Sea un sistema de  $N$  partículas en el estado  $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$

$$\rho_{\Psi}(x) = N \int d^{N-1}x \Psi^*(x, x_2, \dots, x_N) \Psi(x, x_2, \dots, x_N)$$

densidad de probabilidad de encontrar una partícula en la posición  $x$

Operador densidad  
posibles definiciones

$$\hat{\rho}(x) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i)$$

En representación posición

$$\hat{n}_{\Psi} = \sum_{k, \ell=1}^{\infty} |k\rangle n_{k\ell} \langle \ell|$$

donde  $n_{k\ell} = \langle \Psi | \hat{c}_{\ell}^{\dagger} \hat{c}_k | \Psi \rangle$

# Operadores densidad

La generalización de  $\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$  al caso de  $N$  partículas es:

$$\hat{D}(x) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{D}(x) | \Psi \rangle &= \int d^N \mathbf{x} \Psi^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \left[ \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \\ &= N \int d^{N-1} \mathbf{x} \Psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\ &= \rho_{\Psi}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

# Operadores densidad

$$\hat{D}(x) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \equiv \rho_x(x_i) \quad \longrightarrow \quad \hat{D}(x) = \sum_{\alpha, \beta} \langle \alpha | \rho_x | \beta \rangle c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \rho_x | \beta \rangle &= \int dy \varphi_{\alpha}^{*}(y) \rho_x(y) \varphi_{\beta}(y) \\ &= \int dy \varphi_{\alpha}^{*}(y) \delta(x - y) \varphi_{\beta}(y) = \varphi_{\alpha}^{*}(x) \varphi_{\beta}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad \hat{D}(x) &= \sum_{\alpha, \beta} \varphi_{\alpha}^{*}(x) \varphi_{\beta}(x) c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta} \\ &= \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}^{*}(x) c_{\alpha}^{\dagger} \sum_{\beta} \varphi_{\beta}(x) c_{\beta} = \hat{\psi}^{\dagger}(x) \hat{\psi}(x) \end{aligned}$$

## Relación entre la función de Green y la matriz densidad

Extendiendo el trabajo anterior se puede llegar al operador **matriz densidad**:

$$\hat{D}(x, x') = \hat{\psi}^\dagger(x')\hat{\psi}(x) \quad \text{Ec. (6.5) de GRH}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{D}(x, x') \rangle &= \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \langle \Psi_0 | \hat{D}(x, x') | \Psi_0 \rangle && \text{Matriz densidad en el GS} \\ &= \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x')\psi(x) | \Psi_0 \rangle \\ &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x't')_H \psi(xt)_H | \Psi_0 \rangle \\ &= -iG(xt, x't^+) \end{aligned}$$

$$G(xt, x't') = G(x0, x'(t' - t)) \longrightarrow \langle \hat{D}(x, x') \rangle = -iG(x0, x'^+)$$

Función de Green: extensión temporal de la matriz densidad

# Pictures

## interaction picture

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle_A &\equiv A(t)|\psi\rangle \\
 O(t)_A &\equiv A(t)OA^\dagger(t)
 \end{aligned}$$

Supongamos:  $H_S = H_0 + V_S$        $H_0 \neq H_0(t)$

$$A(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} \longrightarrow \begin{cases} |\Psi(t)\rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} |\Psi(t)\rangle_S \\ O(t)_I = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} O(t)_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} \end{cases}$$

Notar que, en particular, el  $H_0$  no cambia:  $[H_0]_I = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} [H_0]_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} = [H_0]_S \equiv H_0$

### Operadores de creación y destrucción en el picture de interacción

Supongamos que conocemos los autoestados de  $H_0$ :  $|j\rangle$

Operadores de creación y destrucción  $\longrightarrow c_j^\dagger \quad c_j$

Teorema: 
$$\begin{cases} c_j(t)_I = c_j e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_j t} \\ c_j^\dagger(t)_I = c_j^\dagger e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_j t} \end{cases}$$
Sólo se agrega una fase

Teorema: 
$$\begin{cases} c_j(t)_I = c_j e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_j t} \\ c_j^\dagger(t)_I = c_j^\dagger e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon_j t} \end{cases}$$

Demostración:

En estos operadores de creación y destrucción el  $H_0$  es diagonal:

$$H_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i c_i^\dagger c_i$$

Por definición: 
$$\begin{cases} c_j(t)_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} c_j e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \\ c_j^\dagger(t)_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} c_j^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \end{cases}$$

$O(t)_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} O(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}$

Veamos como actúan sobre una base del espacio de Fock:

$$|\phi_\alpha\rangle = \prod_{i=1}^{\infty} (c_i^\dagger)^{n_i^{(\alpha)}} |0\rangle, \quad n_i^{(\alpha)} = 0 \text{ or } 1$$

$$\left. \begin{aligned}
 |\phi_\alpha\rangle &= \prod_{i=1}^{\infty} (c_i^\dagger)^{n_i^{(\alpha)}} |0\rangle, \quad n_i^{(\alpha)} = 0 \text{ or } 1 \\
 H_0 &= \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i c_i^\dagger c_i
 \end{aligned} \right\} \longrightarrow H_0 |\phi_\alpha\rangle = W_\alpha |\phi_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} n_i^{(\alpha)} \epsilon_i$$

$$\left. \begin{aligned}
 H_0 c_j |\phi_\alpha\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i c_i^\dagger c_i c_j |\phi_\alpha\rangle \\
 c_i^\dagger c_i c_j &= -c_i^\dagger c_j c_i = -\delta_{ij} c_i + c_j c_i^\dagger c_i
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 H_0 c_j |\phi_\alpha\rangle &= -\epsilon_j c_j |\phi_\alpha\rangle + c_j H_0 |\phi_\alpha\rangle \\
 &= (W_\alpha - \epsilon_j) c_j |\phi_\alpha\rangle.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow c_j(t)_I |\phi_\alpha\rangle &= e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} c_j e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\phi_\alpha\rangle \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar} W_\alpha t} e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} c_j |\phi_\alpha\rangle \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar} W_\alpha t} e^{\frac{i}{\hbar} (W_\alpha - \epsilon_j) t} c_j |\phi_\alpha\rangle \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_j t} c_j |\phi_\alpha\rangle.
 \end{aligned}$$



Entonces:

$$\begin{cases} c_j(t)_I = c_j e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_j t} \\ c_j^\dagger(t)_I = c_j^\dagger e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon_j t} \end{cases}$$

Aplicación:

$$V(t)_I = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij | v | k\ell \rangle c_i^\dagger(t)_I c_j^\dagger(t)_I c_\ell(t)_I c_k(t)_I$$

→

$$V(t)_I = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij | v | k\ell \rangle e^{(i/\hbar)(\epsilon_i + \epsilon_j - \epsilon_\ell - \epsilon_k)t} c_i^\dagger c_j^\dagger c_\ell c_k$$

En el picture de interacción **evolucionan los estados y los operadores**

Operadores

$$\left\{ \begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} O(t)_I &= [O(t)_I, H_0] + i\hbar \left[ \frac{\partial O}{\partial t} \right]_I \\ \left[ \frac{\partial O}{\partial t} \right]_I &\equiv e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \left[ \frac{\partial O_S}{\partial t} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \end{aligned} \right.$$

Se demuestra igual que en el picture de Heisenberg

En el picture de interacción evolucionan los estados y los operadores

## Estados

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_S = H_S |\Psi(t)\rangle_S$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{-(i/\hbar)H_0 t} |\Psi(t)\rangle_I = e^{-(i/\hbar)H_0 t} \left[ H_0 |\Psi(t)\rangle_I + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I \right]$$

$$= H_S e^{-(i/\hbar)H_0 t} |\Psi(t)\rangle_I$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I = e^{(i/\hbar)H_0 t} H_S e^{-(i/\hbar)H_0 t} |\Psi(t)\rangle_I - H_0 |\Psi(t)\rangle_I$$

$$= [H(t)_I - H_0] |\Psi(t)\rangle_I$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I = V(t)_I |\Psi(t)\rangle_I$$

## Serie de Dyson

Definimos un operador de evolución  $U(t, t')$  en el picture de interacción:

$$\left. \begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_I &= U(t, t') |\Psi(t')\rangle_I \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I &= V(t)_I |\Psi(t)\rangle_I \end{aligned} \right\} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = V(t)_I U(t, t')$$

Condición inicial:  $U(t', t') = 1$

Pasamos a una ecuación integral:

$$U(t, t') = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V(t_1)_I U(t_1, t') dt_1$$

$$\left\{ \begin{aligned} U_0(t, t') &= 1 \\ U_1(t, t') &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V(t_1)_I dt_1 \\ U_2(t, t') &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V(t_1)_I U_1(t_1, t') dt_1 \end{aligned} \right.$$

Aproximaciones en órdenes sucesivos en  $V(t)_I$

$$\left\{ \begin{aligned} U_0(t, t') &= 1 \\ U_1(t, t') &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V(t_1)_I dt_1 \\ U_2(t, t') &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V(t_1)_I U_1(t_1, t') dt_1 \end{aligned} \right.$$

Aproximaciones en órdenes sucesivos en  $V(t)_I$

$$= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V(t_1)_I dt_1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t'}^t V(t_1)_I \int_{t'}^{t_1} V(t_2)_I dt_2 dt_1$$

$$U_N(t, t') = 1 + \sum_{n=1}^N U^{(n)}(t, t') \longrightarrow U(t, t') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t, t')$$

$$U^{(n)}(t, t') = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n V(t_1)_I \dots V(t_n)_I$$

$$t' \leq t_n \leq t_{n-1} \leq \dots \leq t_1 \leq t$$

Serie de Dyson

# Parte de Guía 4

Del libro de Fetter & Walecka :

**3.2.** One of the most useful relations in quantum field theory is

$$e^{iS} \hat{O} e^{-iS} = \hat{O} + i[\hat{S}, \hat{O}] + \frac{i^2}{2!} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{O}]] + \frac{i^3}{3!} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{O}]]] + \dots$$

Verify this result to the order indicated. Evaluate the commutators explicitly and re-sum the series to derive Eqs. (6.10) from Eqs. (6.7) and (6.9).