Clase 14

Viernes 23/10/2020

La clase pasada vimos:

* Estructura analítica de la función de Green

** Función de Green y matriz densidad

*** Picture de Interacción

Hoy vemos:

* Serie de Dyson en picture de interacción

** Propagador de polarización

Relación entre la función de Green y la matriz densidad

$$\langle \hat{D}(x,x')\rangle = -iG(x0,x'^{+})$$

REPASO

Picture de interacción

$$H_S = H_0 + V_S \qquad H_0 \neq H_0(t)$$

$$\begin{cases} |\Psi(t)\rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}\,|\Psi(t)\rangle_S \\ O(t)_I = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} O(t)_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_A &\equiv A(t)|\psi\rangle \\ O(t)_A &\equiv A(t) O A^{\dagger}(t) \end{aligned}$$

Teorema:
$$\begin{cases} c_j(t)_I = c_j e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_j t} \\ c_j^{\dagger}(t)_I = c_j^{\dagger} e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_j t} \end{cases}$$

Sólo se agrega una fase

Picture de Interacción

En el picture de interacción **evolucionan los estados y los operadores**

Operadores

$$i\hbar \frac{d}{dt} O(t)_I = [O(t)_I, H_0] + i\hbar \left[\frac{\partial O}{\partial t}\right]_I$$

$$\left[\frac{\partial O}{\partial t}\right]_I \equiv e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \left[\frac{\partial O_S}{\partial t}\right] e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}.$$

Se demuestra igual que en el picture de Heisenberg

En el picture de interacción **evolucionan los estados y los operadores**

Estados

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\Psi(t)\rangle_S = H_S|\Psi(t)\rangle_S$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{-(i/\hbar)H_0 t}\,|\,\Psi(t)\rangle_I = e^{-(i/\hbar)H_0 t}\left[H_0\,|\,\Psi(t)\rangle_I + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_I\right]$$

$$= H_S e^{-(i/\hbar)H_0 t}\,|\,\Psi(t)\rangle_I$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\Psi(t)\rangle_I = e^{(i/\hbar)H_0 t}H_S e^{-(i/\hbar)H_0 t}\,|\,\Psi(t)\rangle_I - H_0|\Psi(t)\rangle_I$$

$$= [H(t)_I - H_0]\,|\,\Psi(t)\rangle_I$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\Psi(t)\rangle_I = V(t)_I\,|\,\Psi(t)\rangle_I}$$

Ecuación de Tomonaga-Schwinger

Serie de Dyson

Definimos un operador de evolución $U(t,t')$ en el picture de interacción:

$$\left.\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_I &= U(t,t')\,|\Psi(t')\rangle_I \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_I &= V(t)_I\,|\Psi(t)\rangle_I \end{aligned}\right\} \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t') = V(t)_I U(t,t')$$

Condición inicial: $U(t',t') = 1$

Pasamos a una ecuación integral: $$\boxed{U(t,t') = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t} V(t_1)_I U(t_1,t')\,\mathrm{d}t_1}$$

$$\begin{cases} U_0(t,t') = 1 \\ U_1(t,t') = 1 - \dfrac{i}{\hbar}\displaystyle\int_{t'}^{t} V(t_1)_I\,\mathrm{d}t_1 \\ U_2(t,t') = 1 - \dfrac{i}{\hbar}\displaystyle\int_{t'}^{t} V(t_1)_I U_1(t_1,t')\,\mathrm{d}t_1 \end{cases}$$

Aproximaciones en órdenes sucesivos en $V(t)_I$

$$\begin{cases} U_0(t,t') &= 1 \\ U_1(t,t') &= 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t} V(t_1)_I \,\mathrm{d}t_1 \\ U_2(t,t') &= 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t} V(t_1)_I U_1(t_1,t')\,\mathrm{d}t_1 \end{cases}$$

Aproximaciones en órdenes sucesivos en $V(t)_I$

$$= 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t} V(t_1)_I \,\mathrm{d}t_1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t'}^{t} V(t_1)_I \int_{t'}^{t_1} V(t_2)_I \,\mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_1$$

$$U_N(t,t') = 1 + \sum_{n=1}^{N} U^{(n)}(t,t') \longrightarrow \boxed{U(t,t') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t,t')}$$

$$U^{(n)}(t,t') = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t'}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \ldots \int_{t'}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n\, V(t_1)_I \ldots V(t_n)_I$$

$$t' \leq t_n \leq t_{n-1} \leq \ldots \leq t_1 \leq t$$

Serie de Dyson

Reescribamos la serie de Dyson unificando los límites de integración, haciendo todas la integrales de t' a t

Veamos el caso más sencillo:

$$U^{(2)}(t,t') = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t'}^{t_1} \mathrm{d}t_2 V(t_1)_I V(t_2)_I$$

Es una integral en el plano de tiempos t_1 y t_2, en el área donde $t_1 > t_2$

o sea, hay ordenamiento temporal, porque a la derecha siempre está

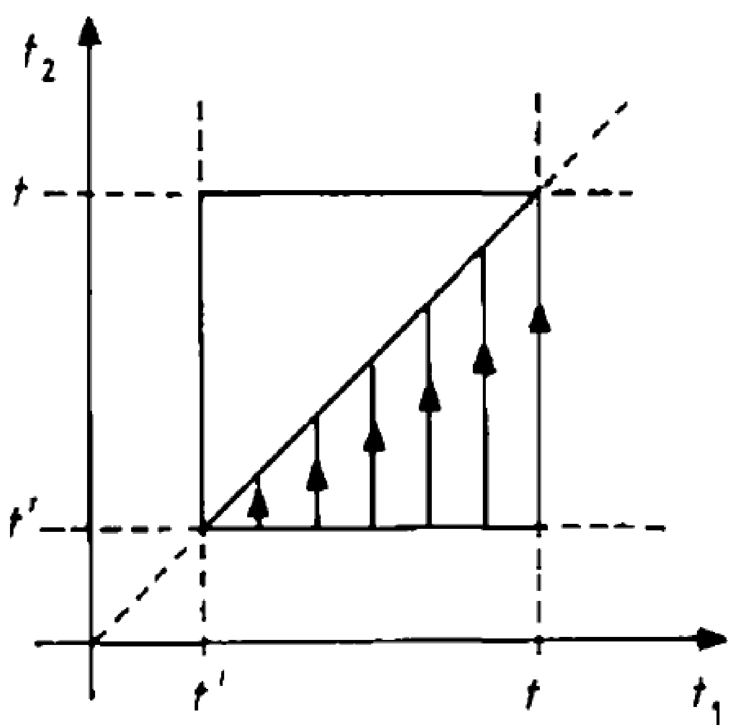
el operador con tiempo menor.

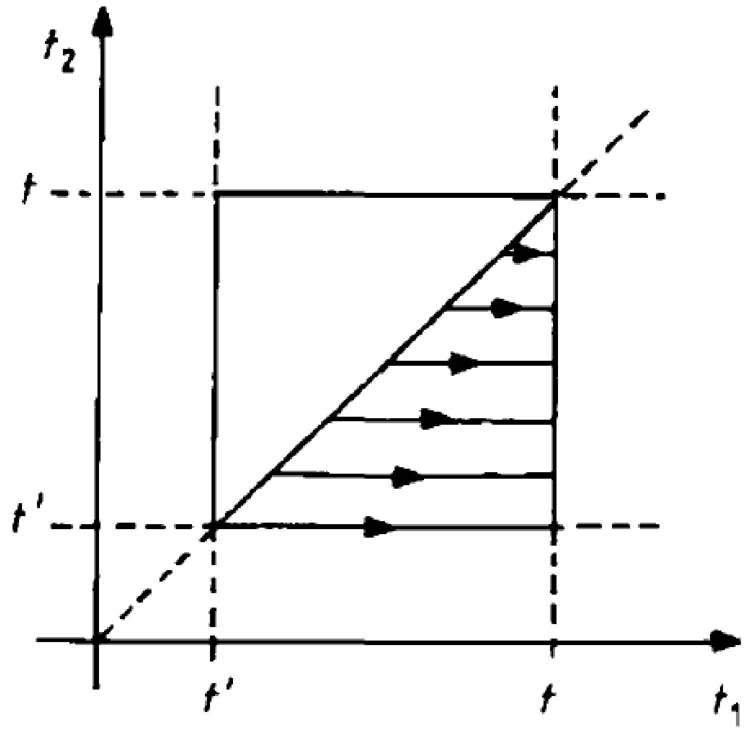
Al reescribir la integral tenemos que respetar eso, porque en general :

$$V(t_1)_I V(t_2)_I \neq V(t_2)_I V(t_1)_I$$

–- Cuidado con los typos en el libro en esta parte ---

$$U^{(2)}(t,t') = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t'}^{t_1} \mathrm{d}t_2 V(t_1)_I V(t_2)_I$$





Notar estas dos formas de hacer la integral :

$$I = \int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \, V(t_1)_I V(t_2)_I = \int_{t'}^{t} dt_2 \int_{t_2}^{t} dt_1 \, V(t_1)_I V(t_2)_I$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2\, V(t_1)_I V(t_2)_I + \frac{1}{2}\int_{t'}^{t} dt_2 \int_{t_2}^{t} dt_1\, V(t_1)_I V(t_2)_I$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2\, V(t_1)_I V(t_2)_I + \frac{1}{2}\int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2\, V(t_2)_I V(t_1)_I$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t'}^{t} dt_1 \left(\int_{t'}^{t_1} dt_2\, V(t_1)_I V(t_2)_I + \int_{t_1}^{t} dt_2\, V(t_2)_I V(t_1)_I\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t} dt_2\, T[V(t_1)_I V(t_2)_I]$$

Donde usamos el ordenamiento temporal de operadores bosónicos :

$$T[A(t_1)B(t_2)] \equiv \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & \text{if } t_1 > t_2 \\ B(t_2)A(t_1) & \text{if } t_2 > t_1 \end{cases}$$

Aplicamos la misma técnica a todas las integrales :

$$U^{(2)}(t,t') = \frac{-(i/\hbar)^2}{2} \int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t} dt_2 \, T[V(t_1)_I V(t_2)_I]$$

$$U^{(n)}(t,t') = \frac{(-i/\hbar)^n}{n!} \int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t} dt_2 \ldots \int_{t'}^{t} dt_n T[V(t_1)_I \ldots V(t_n)_I]$$

$$\begin{aligned} U(t,t') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i/\hbar)^n}{n!} \int_{t'}^{t} dt_1 \ldots \int_{t'}^{t} dt_n T[V(t_1)_I \ldots V(t_n)_I] \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i/\hbar)^n}{n!} \int_{t'}^{t} dt_1 \ldots \int_{t'}^{t} dt_n V(t_1)_I \ldots V(t_n)_I \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i/\hbar)^n}{n!} \left(\int_{t'}^{t} d\tau V(\tau)_I \right)^n . \end{aligned}$$

notación compacta ...

$$\boxed{U(t,t') = T \exp\left[\frac{-i}{\hbar} \int_{t'}^{t} d\tau V(\tau)_I \right]}$$

Serie de Dyson

Propagador de polarización

Sean A y B observables. Queremos calcular la correlación entre ambos :

$$f_{AB} = \langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

Si A y B son locales en la representación espín-posición, tenemos :

$$\begin{aligned} A &= \int \mathrm{d}x\, A(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \\ B &= \int \mathrm{d}x'\, B(x') \psi^\dagger(x') \psi(x') \end{aligned}$$

Sus valores medios en el estado fundamental son :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \frac{1}{\langle \Psi_0 \mid \Psi_0 \rangle} \int \mathrm{d}x\, A(x) \langle \Psi_0 \left| \psi^\dagger(x) \psi(x) \right| \Psi_0 \rangle \\ \langle B \rangle &= \frac{1}{\langle \Psi_0 \mid \Psi_0 \rangle} \int \mathrm{d}x'\, B(x') \langle \Psi_0 \left| \psi^\dagger(x') \psi(x') \right| \Psi_0 \rangle \end{aligned}$$

Supongamos $\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle = 1$

$$f_{AB} = \langle\Psi_0|\left(A - \langle A\rangle\right)\left(B - \langle B\rangle\right)|\Psi_0\rangle$$

$$f_{AB} = \langle\Psi_0|\left(\int dx A(x)\left[\psi^\dagger(x)\psi(x) - \langle\Psi_0|\psi^\dagger(x)\psi(x)|\Psi_0\rangle\right]\right)$$
$$\times\left(\int dx' B(x')\left[\psi^\dagger(x')\psi(x') - \langle\Psi_0|\psi^\dagger(x')\psi(x')|\Psi_0\rangle\right]\right)|\Psi_0\rangle$$

$$f_{AB} = \int dx \int dx' A(x)B(x')\langle\Psi_0|\left[\psi^\dagger(x)\psi(x) - \langle\Psi_0|\psi^\dagger(x)\psi(x)|\Psi_0\rangle\right]$$
$$\times\left[\psi^\dagger(x')\psi(x') - \langle\Psi_0|\psi^\dagger(x')\psi(x')|\Psi_0\rangle\right]|\Psi_0\rangle$$

$$f_{AB} = \int dx \int dx' A(x) B(x') \langle \Psi_0 | \left[\psi^\dagger(x)\psi(x) - \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x)\psi(x) | \Psi_0 \rangle \right] \times \left[\psi^\dagger(x')\psi(x') - \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x')\psi(x') | \Psi_0 \rangle \right] | \Psi_0 \rangle$$

Definimos las fluctuaciones del operador densidad :

$$\widetilde{\rho}(x) \equiv \rho(x) - \langle \rho(x) \rangle = \psi^\dagger(x)\psi(x) - \frac{\langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x)\psi(x) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle}$$

$$\longrightarrow \quad f_{AB} = \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}x' A(x) B(x') \langle \Psi_0 | \widetilde{\rho}(x) \widetilde{\rho}(x') | \Psi_0 \rangle$$

Definimos el **propagador de polarización** :

$$i\Pi(xt, x't') = \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \langle \Psi_0 | T[\widetilde{\rho}(xt)_H \widetilde{\rho}(x't')_H] | \Psi_0 \rangle$$

$$= \frac{\langle \Psi_0 | T[\psi^\dagger(xt)_H \psi(xt)_H \psi^\dagger(x't')_H \psi(x't')_H] | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} - \langle \rho(x) \rangle \langle \rho(x') \rangle$$