

# Clase 16

Viernes 30/10/2020

## La clase pasada vimos:

\* Serie de Dyson en picture de interacción

14 Pictures

## Hoy vemos:

\* Correlación entre observables

16 The polarization propagator, the two-particle Green's function and the hierarchy of equations of motion

\*\* Propagador de polarización

\*\*\* Encendido adiabático de la interacción

Chapter 18

Time-dependent perturbation theory with adiabatic turning-on of the interaction

$$U_N(t, t') = 1 + \sum_{n=1}^N U^{(n)}(t, t') \longrightarrow U(t, t') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t, t')$$

$$U^{(n)}(t, t') = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n V(t_1)_I \dots V(t_n)_I$$

$$t' \leq t_n \leq t_{n-1} \leq \dots \leq t_1 \leq t$$

**Serie de Dyson**

$$U(t, t') = T \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} \int_{t'}^t d\tau V(\tau)_I \right]$$

Serie de Dyson

## Correlación entre observables A y B

Sean A y B observables. Queremos calcular la correlación entre ambos :

$$f_{AB} = \langle (A - \langle A \rangle) (B - \langle B \rangle) \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

Si A y B son locales en la representación espín-posición, tenemos :

$$A = \int d\mathbf{x} A(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})$$

$$B = \int d\mathbf{x}' B(\mathbf{x}') \psi^\dagger(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}')$$

$$A = \int d^3r \sum_{\beta\alpha} \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}) A_{\beta\alpha}(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r})$$

## Correlación entre observables A y B

Sus valores medios en el estado fundamental son :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \int dx A(x) \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x) \psi(x) | \Psi_0 \rangle$$
$$\langle B \rangle = \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \int dx' B(x') \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x') \psi(x') | \Psi_0 \rangle$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \int d^3r \sum_{\alpha\beta} \langle \Psi_0 | \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}) A_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}) | \Psi_0 \rangle.$$

$$\longrightarrow \langle A \rangle = \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \int d^3r \lim_{r' \rightarrow r} \sum_{\alpha\beta} A_{\beta\alpha} \langle \Psi_0 | \psi_\beta^\dagger(r') \psi_\alpha(r) | \Psi_0 \rangle$$

## Correlación entre observables A y B

Supongamos  $\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = 1$

(Estado fundamental normalizado para simplificar un poco las ecuaciones)

$$f_{AB} = \langle \Psi_0 | (A - \langle A \rangle) (B - \langle B \rangle) | \Psi_0 \rangle$$

$$f_{AB} = \langle \Psi_0 | \left( \int dx A(x) [\psi^\dagger(x)\psi(x) - \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x)\psi(x) | \Psi_0 \rangle] \right) \\ \times \left( \int dx' B(x') [\psi^\dagger(x')\psi(x') - \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x')\psi(x') | \Psi_0 \rangle] \right) | \Psi_0 \rangle$$

$$f_{AB} = \int dx \int dx' A(x) B(x') \langle \Psi_0 | [\psi^\dagger(x)\psi(x) - \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x)\psi(x) | \Psi_0 \rangle] \\ \times [\psi^\dagger(x')\psi(x') - \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x')\psi(x') | \Psi_0 \rangle] | \Psi_0 \rangle$$

## Correlación entre observables A y B

$$f_{AB} = \int dx \int dx' A(x) B(x') \langle \Psi_0 | [\psi^\dagger(x)\psi(x) - \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x)\psi(x) | \Psi_0 \rangle] \\ \times [\psi^\dagger(x')\psi(x') - \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x')\psi(x') | \Psi_0 \rangle] | \Psi_0 \rangle$$

Definimos las fluctuaciones del operador densidad :

$$\tilde{\rho}(x) \equiv \rho(x) - \langle \rho(x) \rangle = \psi^\dagger(x)\psi(x) - \frac{\langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x)\psi(x) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle}$$

$$\rightarrow \boxed{f_{AB} = \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \int dx \int dx' A(x) B(x') \langle \Psi_0 | \tilde{\rho}(x)\tilde{\rho}(x') | \Psi_0 \rangle}$$

Para expresar correlaciones a distintos tiempos necesitamos definir el **propagador de polarización** :

$$\begin{aligned} i\Pi(xt, x't') &= \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \langle \Psi_0 | T[\tilde{\rho}(xt)_H \tilde{\rho}(x't')_H] | \Psi_0 \rangle \\ &= \frac{\langle \Psi_0 | T[\psi^\dagger(xt)_H \psi(xt)_H \psi^\dagger(x't')_H \psi(x't')_H] | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} - \langle \rho(x) \rangle \langle \rho(x') \rangle \end{aligned}$$

## Correlación entre observables A y B

Con estas cantidades podemos calcular el valor medio en el estado fundamental de operadores de dos partículas :

$$\langle v \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \int dx \int dx' v(x, x') \langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x') \psi(x') \psi(x) | \Psi_0 \rangle$$

$$\frac{\langle \Psi_0 | \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x') \psi(x') \psi(x) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle}$$


$$= \frac{\langle \Psi_0 | \tilde{\rho}(x) \tilde{\rho}(x') | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} + \langle \rho(x) \rangle \langle \rho(x') \rangle - \delta_{xx'} \langle \rho(x) \rangle$$

$$\langle v \rangle = \frac{1}{2} \int dx \int dx' v(x, x') [i\Pi(x, x') + \langle \rho(x) \rangle \langle \rho(x') \rangle - \delta_{xx'} \langle \rho(x) \rangle]$$



# Encendido adiabático de la interacción

Para calcular el estado fundamental (EF) **con interacción** a partir del EF **sin interacción**, introducimos un problema ficticio con una dependencia *artificial del tiempo*:

$$|\Psi_0\rangle = U(0, -\infty)|\Phi_0\rangle$$


Con interacción

Sin interacción

Para el operador de evolución en el picture de interacción tenemos la serie de Dyson:

$$U(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n T[v(t_1)_I \dots v(t_n)_I]$$

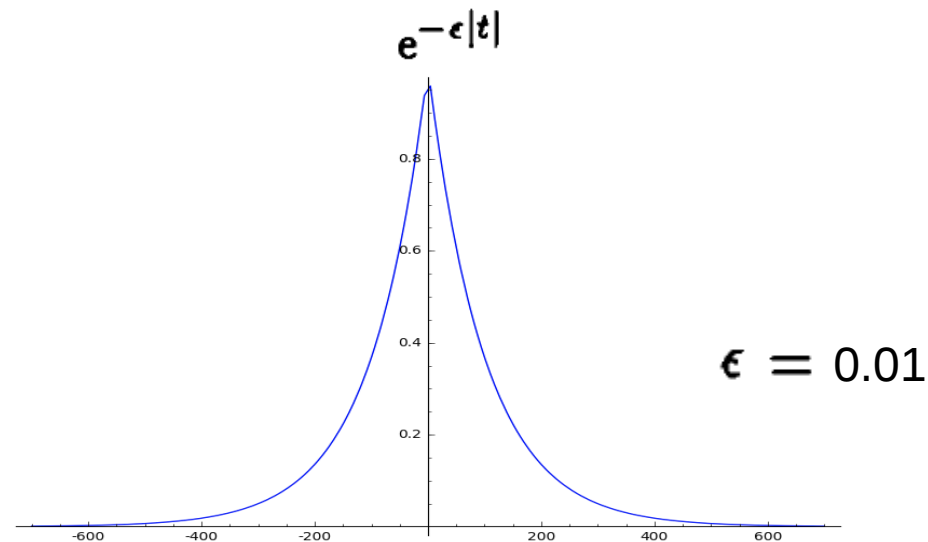
# Encendido adiabático de la interacción

En realidad tenemos :  $H = H_0 + v$  con  $H_0 | \Phi_n \rangle = W_n | \Phi_n \rangle$

Introducimos el siguiente Hamiltoniano en el picture de Schrödinger :

$$H_\epsilon(t)_S \equiv H_0 + e^{-\epsilon|t|} v \quad \left\{ \begin{array}{l} H_\epsilon(t \rightarrow \pm\infty) = H_0 \\ H_\epsilon(t \rightarrow 0) = H \end{array} \right.$$

$\epsilon > 0$



# Encendido adiabático de la interacción

Tenemos una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo :

$$i \frac{\partial}{\partial t} | \Psi_\epsilon(t) \rangle_S = H_\epsilon(t)_S | \Psi_\epsilon(t) \rangle_S \xrightarrow{t = \pm\infty} i \frac{\partial}{\partial t} | \Psi_\epsilon(t) \rangle_S = H_0 | \Psi_\epsilon(t) \rangle_S$$

Condición inicial -- el estado fundamental no interactuante :

$$| \Psi_\epsilon(t \rightarrow -\infty) \rangle_S \equiv e^{-iW_0 t} | \Phi_0 \rangle$$

En el picture de interacción tenemos la ecuación de Tomonaga-Schwinger:

$$\left. \begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} | \Psi_\epsilon(t) \rangle_I &= e^{-\epsilon|t|} v(t)_I | \Psi_\epsilon(t) \rangle_I \\ e^{-\epsilon|t|} v(t)_I | \Psi_\epsilon(t) \rangle_I &\xrightarrow{t = \pm\infty} 0 \end{aligned} \right\} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} i \frac{\partial}{\partial t} | \Psi_\epsilon(t) \rangle_I = 0$$

## Encendido adiabático de la interacción

Entonces :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_\epsilon(t)\rangle_I = 0 \longrightarrow |\Psi_\epsilon(t \rightarrow \pm\infty)\rangle_I = \text{constant}$$

Para la condición inicial en  $t \rightarrow -\infty$  tenemos :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\Psi_\epsilon(t)\rangle_I = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iH_0 t} |\Psi_\epsilon(t)\rangle_S = e^{iH_0 t} e^{-iW_0 t} |\Phi_0\rangle = |\Phi_0\rangle$$

Usando el operador de evolución en el picture de interacción :

$$|\Psi_\epsilon(t)\rangle_I = U_\epsilon(t, -\infty) |\Phi_0\rangle$$

En  $t = 0$  :

$$|\Psi_\epsilon(0)\rangle = U_\epsilon(0, -\infty) |\Phi_0\rangle$$

## Encendido adiabático de la interacción

$$\text{En } t = 0 : \quad | \Psi_\epsilon(0) \rangle = U_\epsilon(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle$$

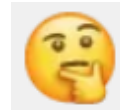
Tomamos  $t = 0$  como el instante en el que coinciden los distintos pictures.

¿Qué relación hay entre  $| \Psi_\epsilon(0) \rangle$  y el estado fundamental interactuante  $| \Psi_0 \rangle$  ?

Con un encendido “adiabático” = infinitamente **lento**, esperamos que :

$$| \Psi_0 \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} | \Psi_\epsilon(0) \rangle$$

Será cierto?



## Teorema de Gell-Mann y Low

- (1) If the quantity  $|\xi\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\Psi_\epsilon(0)\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_\epsilon(0)\rangle}$  exists to all orders in perturbation theory (i.e., if in the perturbation expansion

$$\frac{|\Psi_\epsilon(0)\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_\epsilon(0)\rangle} = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_\epsilon^{(n)}\rangle g^n$$

$$v = g\bar{v}$$

the limit  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\xi\rangle^{(n)}$  exists for each  $n$ ), then  $|\xi\rangle$  is an exact eigenfunction  $H$ . (The theorem does not guarantee that this state is the ground state!)

- (2) The limit  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\Psi_\epsilon(0)\rangle$  does not exist; in fact

$$|\Psi_\epsilon(0)\rangle \sim e^{-iC(g)/\epsilon}$$

as  $\epsilon \rightarrow 0$  under the conditions in 1.

$$H \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) + V(z_1) + V(z_2) + V_C(|z_1 - z_2|) - e(z_1 + z_2)E(t),$$

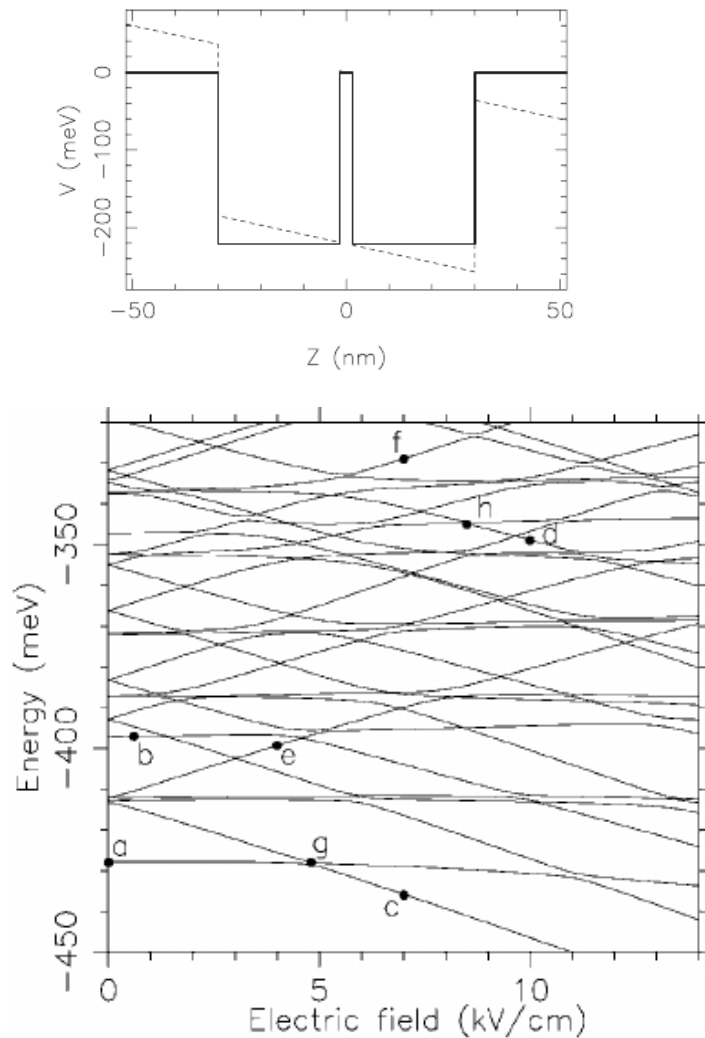


FIG. 1. Energy spectrum of our system as a function of the external uniform electric field.

## Coherent Control of Interacting Electrons in Quantum Dots via Navigation in the Energy Spectrum

G. E. Murgida, D. A. Wisniacki, and P. I. Tamborenea

Departamento de Física "J. J. Giambiagi," Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón I, C1428EHA Buenos Aires, Argentina

(Received 27 December 2006; published 20 July 2007)

PHYSICAL REVIEW B 79, 035326 (2009)

## Coherent control of localization, entanglement, and state superpositions in a double quantum dot with two electrons

G. E. Murgida, D. A. Wisniacki, and P. I. Tamborenea

Department of Physics "J. J. Giambiagi," University of Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pab. I, C1428EHA Buenos Aires, Argentina

(Received 10 October 2008; published 27 January 2009)

