Clase 17

Martes 3/11/2020

La clase pasada vimos:

* Correlación entre observables

16 The polarization propagator, the two-particle Green's function and the hierarchy of equations of motion

** Propagador de polarización

*** Encendido adiabático de la interacción

Teorema de Gell-Mann y Low

Chapter 18

Time-dependent perturbation theory with adiabatic turning-on of the interaction

Hoy vemos:

* Función de Green de 2 y n partículas

16 The polarization propagator, the two-particle Green's function and the hierarchy of equations of motion

** Ecuación de evolución de la función de Green

*** Aplicación del teorema de Gell-Mann y Low :

desarrollo en serie de la función de Green

Chapter 18

Time-dependent perturbation theory with adiabatic turning-on of the interaction

REPASO

Hamiltoniano con **encendido adiabático** de la interacción:

$$H_\epsilon(t)_S \equiv H_0 + e^{-\epsilon|t|}\, v$$

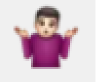
Sin interacción

$$|\,\Psi_\epsilon(0)\rangle = U_\epsilon(0,-\infty)|\,\Phi_0\rangle$$

Vale que $|\,\Psi_0\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} |\,\Psi_\epsilon(0)\rangle$??

Teorema de Gell-Mann y Low (1951):

Si $|\,\xi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \dfrac{|\,\Psi_\epsilon(0)\rangle}{\langle\Phi_0|\,\Psi_\epsilon(0)\rangle}$ existe, entonces es un autoestado de H

(no necesariamente el fundamental )

REPASO

Correlaciones entre operadores A y B:

$$f_{AB} = \langle\Psi_0|\,(A - \langle A\rangle)\,(B - \langle B\rangle)\,|\Psi_0\rangle$$

$$\boxed{f_{AB} = \frac{1}{\langle\Psi_0 \mid \Psi_0\rangle}\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}x' A(x) B(x') \langle\Psi_0\,|\widetilde{\rho}(x)\widetilde{\rho}(x')|\,\Psi_0\rangle}$$

Definición: Propagador de la polarización

$$i\Pi(xt, x't') = \frac{1}{\langle\Psi_0 \mid \Psi_0\rangle}\langle\Psi_0\,|T[\widetilde{\rho}(xt)_H\widetilde{\rho}(x't')_H]|\,\Psi_0\rangle$$

$$= \frac{\langle\Psi_0\,|T[\psi^\dagger(xt)_H\psi(xt)_H\psi^\dagger(x't')_H\psi(x't')_H]|\,\Psi_0\rangle}{\langle\Psi_0 \mid \Psi_0\rangle} - \langle\rho(x)\rangle\langle\rho(x')\rangle$$

Definición: Función de Green de dos partículas

$$\boxed{\begin{aligned} & i^2 G(x_1t_1, x_2t_2, x_3t_3, x_4t_4) \\ & \quad \equiv \quad \frac{1}{\langle \Psi_0 \mid \Psi_0 \rangle} \langle \Psi_0 \left| T[\psi(x_1t_1)_H \psi(x_2t_2)_H \psi^\dagger(x_3t_3)_H \psi^\dagger(x_4t_4)_H] \right| \Psi_0 \rangle \end{aligned}}$$

Con el ordenamiento temporal generalizado:

$$\begin{aligned} T\left[A_1(t_1)A_2(t_2)\ldots A_n(t_n)\right] \quad = \quad & \operatorname{sgn}(P) A_{P(1)}(t_{P(1)}) A_{P(2)}(t_{P(2)}) \ldots \\ & \ldots A_{P(n)}(t_{P(n)}), \end{aligned}$$

$$P \in S_n \qquad t_{P(1)} > t_{P(2)} > \ldots > t_{P(n)}$$

Función de Green de dos partículas

El ordenamiento temporal se complica, acá hay $4! = 24$ posibilidades.

Sin embargo, hay casos que están relacionados de forma simple. Por ejemplo:

$$G(1234) = -G(2134) = -G(1243) = G(2143)$$

Finalmente lo que importa es el orden de operadores de creación y destrucción :

$$G = \langle \psi\psi\psi^\dagger\psi^\dagger \rangle \qquad \text{2 partículas}$$

$$G = \langle \psi^\dagger\psi^\dagger\psi\psi \rangle \qquad \text{2 huecos}$$

$$\left.\begin{aligned} G &= \langle \psi\psi^\dagger\psi\psi^\dagger \rangle \\ G &= \langle \psi^\dagger\psi\psi^\dagger\psi \rangle \\ G &= \langle \psi^\dagger\psi\psi\psi^\dagger \rangle \\ G &= \langle \psi\psi^\dagger\psi^\dagger\psi \rangle \end{aligned}\right\} \quad \text{partícula-hueco}$$

Definición: Función de Green de *n* partículas

$$\boxed{\begin{aligned}(i)^n G_n(x_1 t_1, \ldots x_n t_n; x_1' t_1' \ldots x_n' t_n') \\ \equiv \quad \frac{1}{\langle \Psi_0 \mid \Psi_0 \rangle} \langle \Psi_0 \,| T[\psi(x_1 t_1) \ldots \psi(x_n t_n) \psi^\dagger(x_1' t_1') \ldots \psi^\dagger(x_n' t_n')] |\, \Psi_0 \rangle.\end{aligned}}$$

Ecuación de evolución de la Función de Green de una partícula

Se puede demostrar que :

Trabajar con : $\frac{\partial}{\partial t} T[\psi(xt)\psi^\dagger(x't')]$

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla_r^2}{2m}\right] G(xt, x't') = \delta(t-t')\delta_{xx'} - i\int \mathrm{d}y\, v(x,y)\underline{G(xt, yt, yt^+, x't')}$$

Función de Green de 2 partículas

Para partículas no interactuantes se reduce a :

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla_r^2}{2m}\right] G^{(0)}(xt, x't') = \delta(t-t')\delta_{xx'}$$

(Acá se justifica el nombre de Función de Green)

En presencia de un potencial externo hay que hacer :

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla_r^2}{2m}\right] \rightarrow \left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla_r^2}{2m} - u(x)\right]$$

Ecuación de evolución de la Función de Green de *n* partículas

Análogamente se obtiene la ecuación de evolución :

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\nabla_1^2}{2m}\right]\underline{G_n(x_1t_1,\ldots,x_nt_n;x_1't_1',\ldots,x_n't_n')}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\delta_{x_1,x_j'}\delta(t_1-t_j')(-1)^{n-j}$$

$$G_{n-1}(x_2t_2,\ldots,x_nt_n;x_1't_1',\ldots,x_{j-1}'t_{j-1}',x_{j+1}'t_{j+1}',\ldots,x_n't_n')$$

$$-i\int \mathrm{d}y\, v(x_1,y)\underline{G_{n+1}x_1t_1,\ldots,x_nt_n,yt_1;yt_1^+,x_1't_1',\ldots,x_n't_n')}$$

Función de Green de n+1 partículas

Ejercicio: escribir los casos n = 1, 2 y 3

Volvemos al encendido adiabático de la interacción

$$| \Psi_0 \rangle = U(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle$$

Con interacción

Sin interacción

Operador de evolución en el picture de interacción : serie de Dyson

$$U(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_2 \dots \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_n \, T\,[v(t_1)_I \dots v(t_n)_I]$$

Para que nos sirve el teorema de Gell-Mann y Low?

$$|\xi\rangle \doteq \lim_{\epsilon\to 0} \frac{|\Psi_\epsilon(0)\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_\epsilon(0)\rangle} \longrightarrow \lim_{\epsilon\to 0} \frac{U_\epsilon(0,-\infty)|\Phi_0\rangle}{\langle\Phi_0|U_\epsilon(0,-\infty)|\Phi_0\rangle} \equiv \frac{|\Psi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle}$$

con $$H\frac{|\Psi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle} = E\frac{|\Psi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle}$$

Sin interacción tenemos : $$H_0|\Phi_0\rangle = E_0|\Phi_0\rangle$$

Al encender la interacción se produce un cambio o corrimiento en la energía:

$$E - E_0 = \frac{\langle\Phi_0|H - H_0|\Psi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle} = \frac{\langle\Phi_0|V|\Psi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle} = \langle\Phi_0|V\left(\frac{|\Psi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle}\right)$$

Con el estado obtenido con el teorema de Gell-Mann y Low y la serie de Dyson para el operador de evolución :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{U_\epsilon(0,-\infty)|\Phi_0\rangle}{\langle\Phi_0|U_\epsilon(0,-\infty)|\Phi_0\rangle} \equiv \frac{|\Psi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle}$$

$$U_\epsilon(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t} dt_2 \cdots \int_{t'}^{t} dt_n \mathrm{T}\left[V(t_1)_I \cdots V(t_n)_I\right] e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_n|)}$$

se puede demostrar la siguiente expansión del valor medio de operadores:

$$\frac{\langle\Psi_0|\mathrm{T}\left[\mathcal{O}(t)_H \mathcal{O}(t')_H\right]|\Psi_0\rangle}{\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\langle\Phi_0|S_\epsilon|\Phi_0\rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n$$
$$e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_n|)} \langle\Phi_0|\mathrm{T}\left[V(t_1)_I \cdots V(t_n)_I \mathcal{O}(t)_I \mathcal{O}(t')_I\right]|\Phi_0\rangle$$

donde: $S_\epsilon \equiv U_\epsilon(\infty,-\infty)$

Aplicamos la identidad :

$$\frac{\langle\Psi_0|\mathrm{T}\left[\mathcal{O}(t)_H\mathcal{O}(t')_H\right]|\Psi_0\rangle}{\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\langle\Phi_0|S_\epsilon|\Phi_0\rangle}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_n$$
$$e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_n|)}\langle\Phi_0|\mathrm{T}\left[V(t_1)_I\cdots V(t_n)_I\mathcal{O}(t)_I\mathcal{O}(t')_I\right]|\Phi_0\rangle$$

A la función de Green :

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t,\mathbf{r}'t') &= \frac{\langle\Psi_0|\mathrm{T}\left[\psi_\alpha(\mathbf{r}t)_H\psi^\dagger_\beta(\mathbf{r}'t')_H\right]|\Psi_0\rangle}{\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\langle\Phi_0|S_\epsilon|\Phi_0\rangle}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_n \\ &\quad e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_n|)}\langle\Phi_0|\mathrm{T}\left[V(t_1)_I\cdots V(t_n)_I\psi_\alpha(\mathbf{r}t)_I\psi^\dagger_\beta(\mathbf{r}'t')_I\right]|\Phi_0\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t,\mathbf{r}'t') &= \frac{\langle\Psi_0|\mathrm{T}\left[\psi_\alpha(\mathbf{r}t)_H\psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}'t')_H\right]|\Psi_0\rangle}{\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\langle\Phi_0|S_\epsilon|\Phi_0\rangle}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_n \\ &\quad e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_n|)}\langle\Phi_0|\mathrm{T}\left[V(t_1)_I\cdots V(t_n)_I\psi_\alpha(\mathbf{r}t)_I\psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}'t')_I\right]|\Phi_0\rangle \end{aligned}$$

Usaremos esta expresión para el análisis perturbativo y diagramático de la función de Green.

Veamos el término con n=1 :

$$\langle\Phi_0|\mathrm{T}\left[V(t_1)_I\psi_\alpha(\mathbf{r}t)_I\psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}'t')_I\right]|\Phi_0\rangle =$$

$$\frac{1}{2}\int dx_1\int dx_1' v(x_1,x_1')\langle\Phi_0|\mathrm{T}\left[\psi^\dagger(x_1t_1)_I\psi^\dagger(x_1't_1)_I\psi(x_1't_1)_I\psi(x_1t_1)_I\psi_\alpha(\mathbf{r}t)_I\psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}'t')_I\right]|\Phi_0\rangle$$

Guía 5

Ejercicio 3

Exercise 9.1 A fermionic two-orbital system

Consider a physical system consisting of fermions allowed to occupy two orbitals. The Hamiltonian is given by

$$H = E_1 c_1^\dagger c_1 + E_2 c_2^\dagger c_2 + t c_1^\dagger c_2 + t^* c_2^\dagger c_1.$$

Find the Green's function $G^R(ij,\omega)$, where i and j can be both be either 1 or 2 and where $G^R(ij, t-t') = -i\theta(t-t')\langle\{c_i(t),\ c_j^\dagger(t')\}\rangle$. Use the equation of motion method. Don't forget to interpret the result.

Introduction to

Quantum field theory in condensed matter physics

Henrik Bruus and Karsten Flensberg

Ørsted Laboratory
Niels Bohr Institute