

Clase 20

Viernes 13/11/2020

La clase pasada vimos:

- i) Contracciones
- ii) Teorema de Wick para productos ordenados temporalmente

Hoy vemos:

- i) Teoría de perturbaciones para la función de Green
- ii) Diagramas de Feynman

Chapter 19

Particle and hole operators and Wick's theorem

Chapter 20

Feynman diagrams

REPASO

Definición: Contracción

$$\overline{A(t)B(t')} \equiv T(A(t)B(t')) - N(A(t)B(t'))$$

Relación entre Contracción y Pairing

$$\underline{AB} \equiv AB - N(AB)$$

→

$$\overline{A(t)B(t')} = \begin{cases} A(t)B(t') & t > t' \\ \underline{A(t)B(t')} & t > t' \\ -\underline{B(t')A(t)} & t' > t \end{cases}$$

Teorema de Wick para productos ordenados temporalmente



$$\begin{aligned} T(A_1 A_2 \dots A_n) &= N(A_1 A_2 \dots A_n) \\ &\quad + N(\overbrace{A_1 A_2 \dots A_n}) + \\ &\quad + \dots \text{ all other terms with one contraction} \\ &\quad + N(\overbrace{A_1 A_2} \quad \overbrace{\dots A_n}) + \dots \\ &\quad + \dots \text{ all other terms with two contractions} \\ &\quad + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \text{ all completely contracted terms} \\ &\quad \text{(they appear only for even } n) \end{aligned}$$

Las contracciones de operadores de creación y destrucción del H_0 son iguales a las funciones de Green del H_0 , o nulas.

$$iG^{(0)}(jt, kt') = \langle \Phi_0 | T [c_j(t)_I c_k^\dagger(t')_I] | \Phi_0 \rangle = \overbrace{c_j(t)_I c_k^\dagger(t')_I}$$

$$\begin{aligned} \overbrace{\psi(xt)\psi^\dagger(yt')} &= -\overbrace{\psi^\dagger(yt')\psi(xt)} \\ &= \langle \Phi_0 | T (\psi(xt)\psi^\dagger(yt')) | \Phi_0 \rangle \\ &= iG^{(0)}(xt, yt') \end{aligned}$$

Teoría de perturbaciones para la función de Green

Con el procedimiento de encendido adiabático de la interacción obtuvimos para la función de Green:

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\langle \Phi_0 | U_\epsilon(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n e^{-\epsilon(|t_1| + \cdots + |t_n|)} \langle \Phi_0 | \mathbf{T} \left[V(t_1)_I \cdots V(t_n)_I \psi_\alpha(\mathbf{r}t)_I \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}'t')_I \right] | \Phi_0 \rangle$$

O en una base $\{|i\rangle\}$:

$$iG(it, jt') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\langle \Phi_0 | U_\epsilon(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n e^{-\epsilon(|t_1| + \cdots + |t_n|)} \langle \Phi_0 | \mathbf{T} \left[V(t_1)_I \cdots V(t_n)_I c_i(t)_I c_j^\dagger(t')_I \right] | \Phi_0 \rangle$$

Donde:
$$V(t)_I = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij|v|kl \rangle c_i(t)_I^\dagger c_j(t')_I^\dagger c_l(t)_I c_k(t')_I$$

O para una interacción local en coordenadas de posición y spin:

$$V(t)_I = \frac{1}{2} \int \int dx dx' v(x, x') \psi^\dagger(xt)_I \psi^\dagger(x't')_I \psi(x't')_I \psi(xt)_I$$

Cada término de G (orden n) contiene:

Elementos de matriz $\langle ij|v|kl\rangle$

Valores de expectación en el vacío:

$$\langle \Phi_0|T[\text{operadores creación y destrucción}]|\Phi_0\rangle$$

Un $\langle \Phi_0|T[\dots]|\Phi_0\rangle$ es la suma de todas las combinaciones completamente contraídas de los operadores.

Cada combinación se anula o es un producto de propagadores libres G^0

Veamos de nuevo el término de orden $n = 1$:

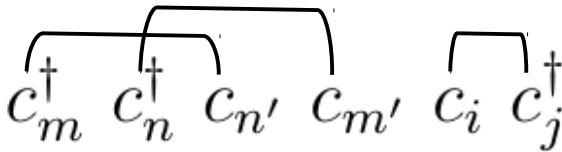
$$\begin{aligned} & \frac{(-i)^1}{1!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \langle \Phi_0 | T[v(t_1)_I c_i(t)_I c_j^\dagger(t')_I] | \Phi_0 \rangle = \\ & = \frac{(-i)^1}{1!} \frac{1}{2^1} \sum_{\underline{mnm'n'}} \langle mn|v|m'n' \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \\ & \times \langle \Phi_0 | T[\underline{c_m^\dagger(t_1) c_n^\dagger(t_1) c_{n'}(t_1) c_{m'}(t_1) c_i(t) c_j^\dagger(t')}] | \Phi_0 \rangle \end{aligned}$$

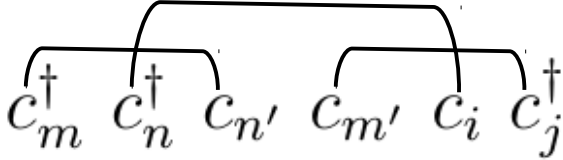
Omitamos la I de picture de interacción (pero está)

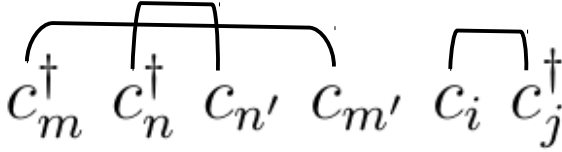
Aplicamos el teorema de Wick al valor medio en el vacío:

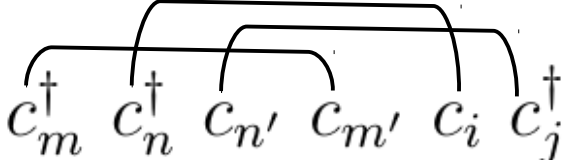
$$\langle \Phi_0 | T [c_m^\dagger(t_1) c_n^\dagger(t_1) c_{n'}(t_1) c_{m'}(t_1) c_i(t) c_j^\dagger(t')] | \Phi_0 \rangle$$

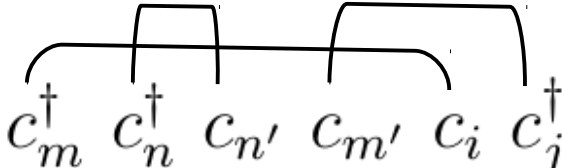
= suma sobre términos completamente contraídos

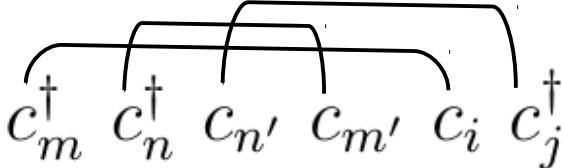
(1) 

(4) 

(2) 

(5) 

(3) 

(6) 

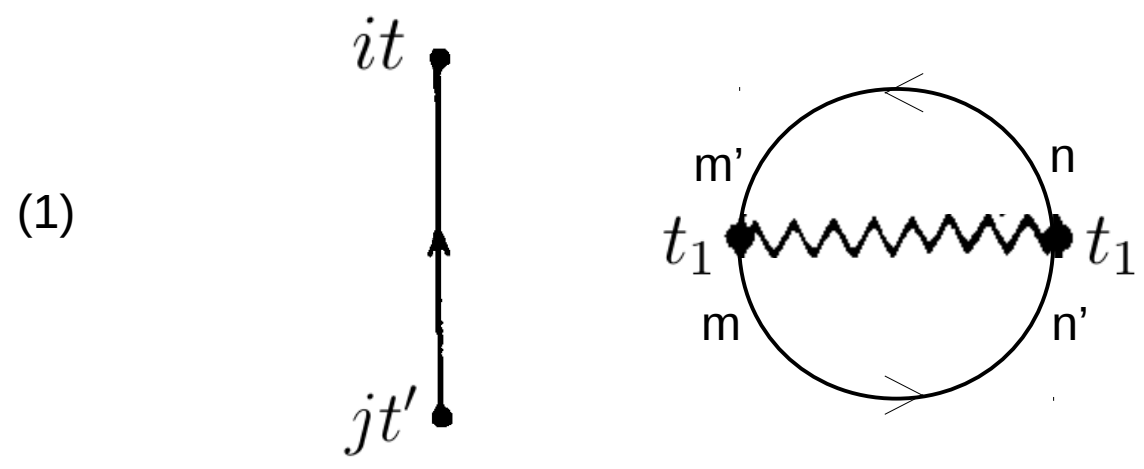
Diagramas de Feynman

$$iG^{(0)}(jt, kt') = \langle \Phi_0 | T [c_j(t)_I c_k^\dagger(t')_I] | \Phi_0 \rangle = \overbrace{c_j(t)_I c_k^\dagger(t')_I}$$

$$\overbrace{c_k^\dagger(t') c_j(t)} = -\overbrace{c_j(t) c_k^\dagger(t')}$$

Ejemplo, primer término:

$$\overbrace{c_m^\dagger c_n^\dagger} \overbrace{c_{n'} c_{m'}} \overbrace{c_i c_j^\dagger} = (-1)^1 (-i) G^0(n't_1, mt_1) (-i) G^0(m't_1, nt_1) i G^0(it, jt')$$



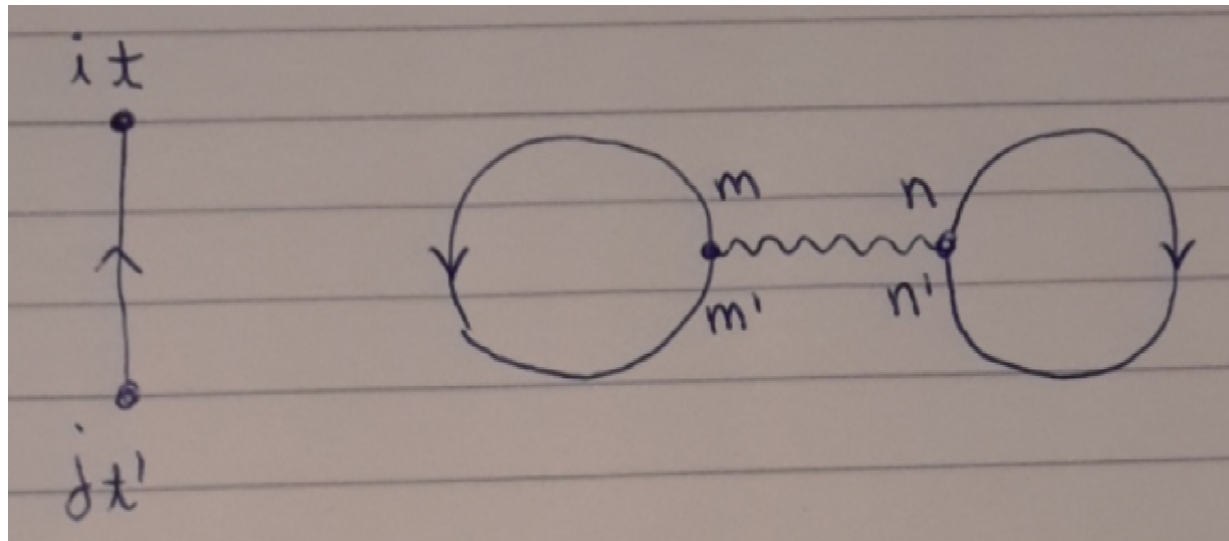
Diagramas de Feynman

Segundo término:

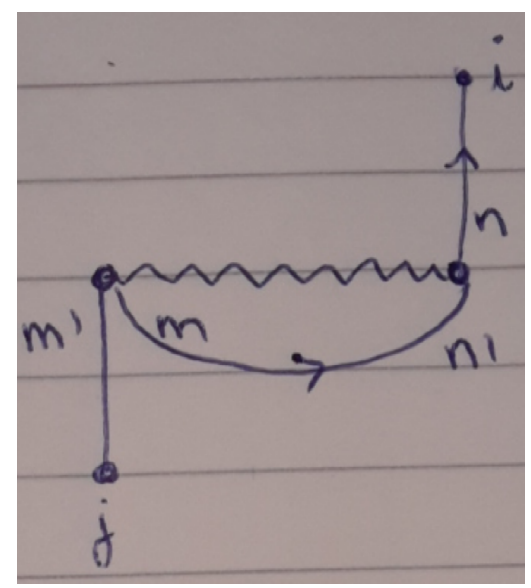
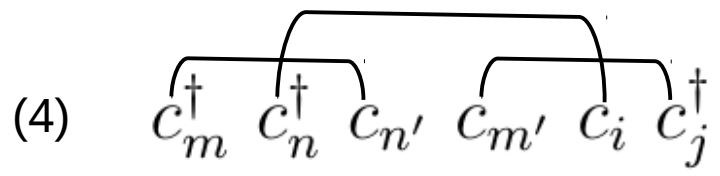
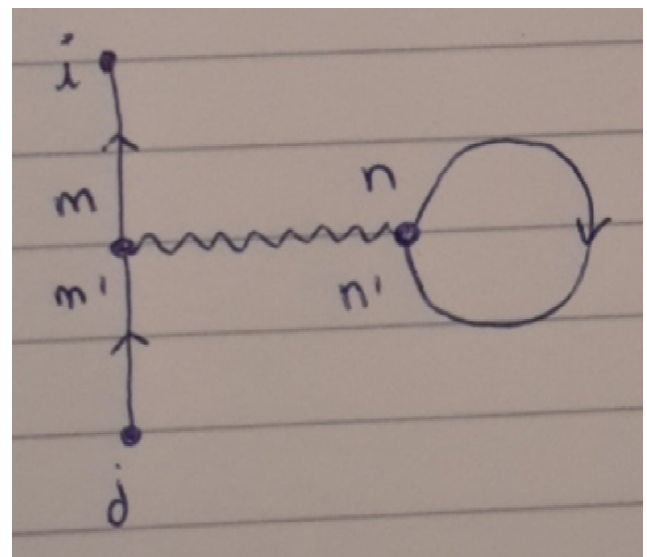
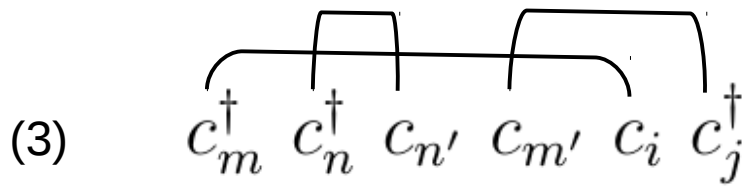
$$\overbrace{c_m^\dagger c_n^\dagger c_{n'}}^{\text{---}} \overbrace{c_{m'}}^{\text{---}} \overbrace{c_i^\dagger c_j^\dagger}^{\text{---}} = (-1)^2 (-i) G^0(m't_1, mt_1) (-i) G^0(n't_1, nt_1) i G^0(it, jt')$$

Con elemento de matriz de interacción: $\langle mn|v|m'n'\rangle$

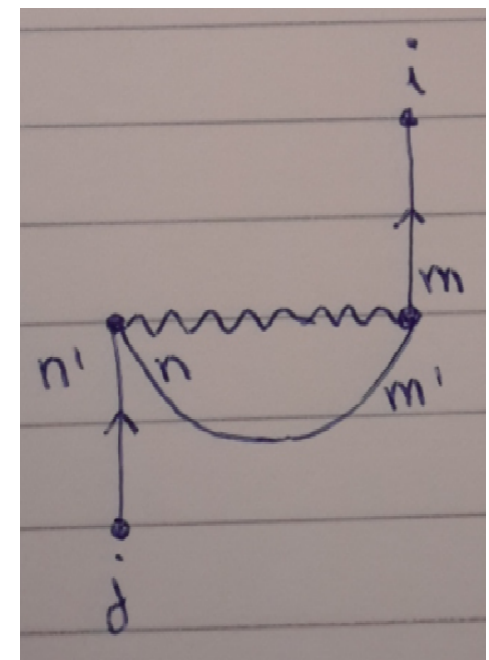
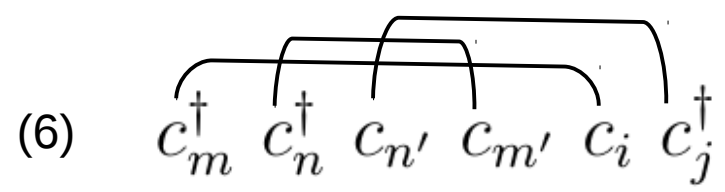
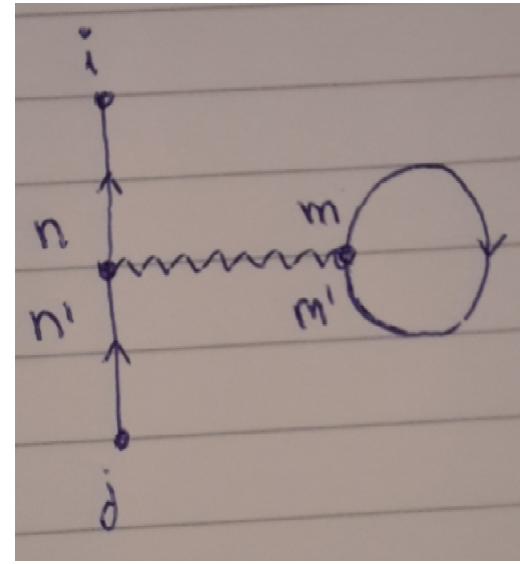
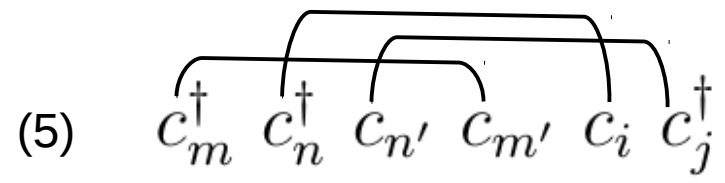
(2)



Diagramas de Feynman



Diagramas de Feynman



Estructura del término de orden n :

$$\frac{(-i)^n}{n!2^n} \times \left\{ \begin{array}{l} \sum_{ijkl\dots} \\ \text{or} \\ \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{x}'_1 \dots \end{array} \right\} \int d^n t e^{-\epsilon(|t_1| \dots)}$$

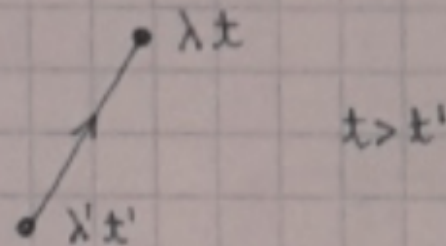
$$\times \sum (\pm) \underbrace{\langle v \rangle \dots \langle v \rangle}_{n \text{ factors}} \underbrace{(iG^{(0)}) \dots (iG^{(0)})}_{\substack{2n \text{ factors for } \Delta E \\ (2n + 1) \text{ factors for } G}}.$$

Diagramas de Feynman

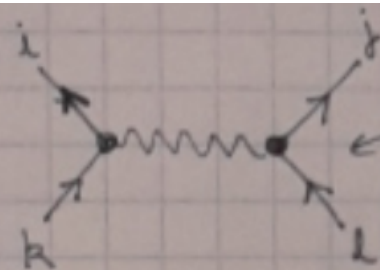
Reglas de Feynman

(1) Eje temporal hacia arriba

(2) $G^{(0)}(\lambda t, \lambda' t')$



(3) $\langle ij | \mathcal{N} | kl \rangle$



vértice interno: una G^0 entra y otra sale.

Las flechas salientes son partículas creadas en la "colisión" y \therefore corresponden a operadores c^\dagger , y las entrantes a c .

■ Coulomb^{no-} relativista es instantánea \rightarrow horizontal (no requerido en caso relat.)

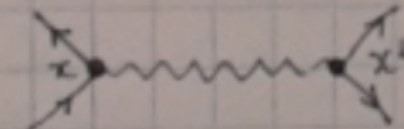
Electrón-fonón es retardada y \therefore no es horizontal.

Diagramas de Feynman

Ejemplos:

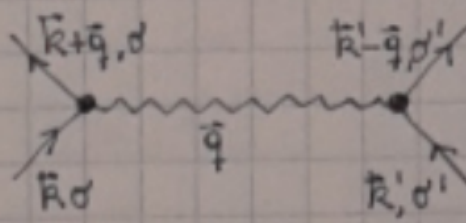
$$N(x, x') = N(\vec{r}, \vec{r}')$$

(local en espacio y ~~no~~ diagonal en spin)



$$N_{\vec{q}} a_{\vec{k}+\vec{q}, \sigma}^{\dagger} a_{\vec{k}'-\vec{q}, \sigma'}^{\dagger} a_{\vec{k}', \sigma'} a_{\vec{k}, \sigma}$$

(Potencial invariante translacional)



en los vértices se conserva el momento (incluyendo el \vec{q} de la "partícula" de la interacción).

$$N_{\alpha\beta, \alpha'\beta'}(\vec{r}, \vec{r}')$$

(local en el espacio pero no diagonal en spin)

