

Clase 21

Martes 17/11/2020

La clase pasada vimos:

- i) Teoría de perturbaciones para la función de Green
- ii) Diagramas de Feynman

Chapter 20

Feynman diagrams

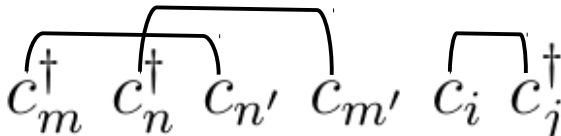
Hoy vemos:

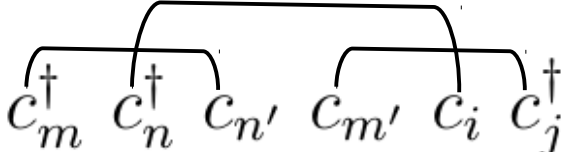
- i) Diagramas de vacío
- ii) Propagador con tiempos iguales
- iii) Más reglas de Feynman
- iv) Diagramas $n=2$. Ejemplos


Aplicamos el teorema de Wick al valor medio en el vacío:

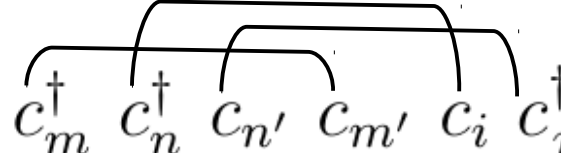
$$\langle \Phi_0 | T [c_m^\dagger(t_1) c_n^\dagger(t_1) c_{n'}(t_1) c_{m'}(t_1) c_i(t) c_j^\dagger(t')] | \Phi_0 \rangle$$

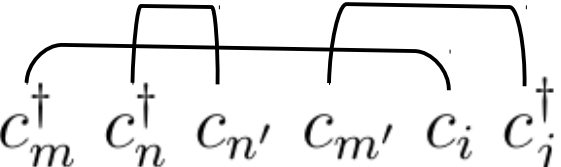
= suma sobre términos completamente contraídos

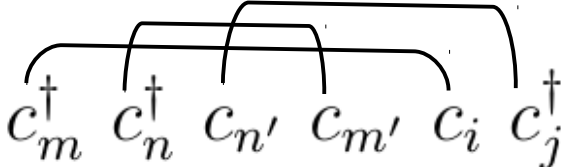
(1) 

(4) 

(2) 

(5) 

(3) 

(6) 

Diagramas de Feynman

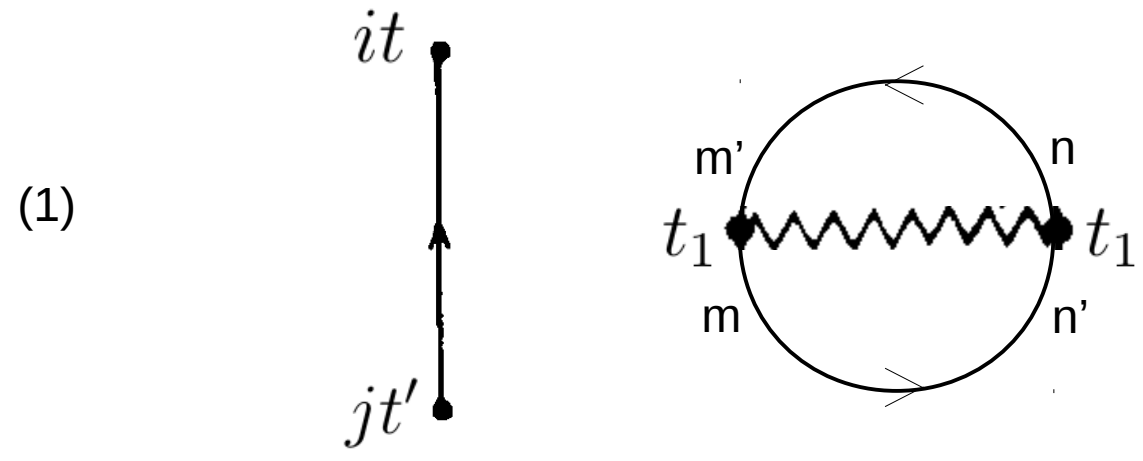
$$iG^{(0)}(jt, kt') = \langle \Phi_0 | T [c_j(t)_I c_k^\dagger(t')_I] | \Phi_0 \rangle = \overbrace{c_j(t)_I c_k^\dagger(t')_I}$$

$$\overbrace{c_k^\dagger(t') c_j(t)} = -\overbrace{c_j(t) c_k^\dagger(t')}$$

REPASO

Ejemplo, primer término:

$$\overbrace{c_m^\dagger c_n^\dagger} \overbrace{c_{n'} c_{m'}} \overbrace{c_i c_j^\dagger} = (-1)^1 (-i) G^0(n't_1, mt_1) (-i) G^0(m't_1, nt_1) iG^0(it, jt')$$



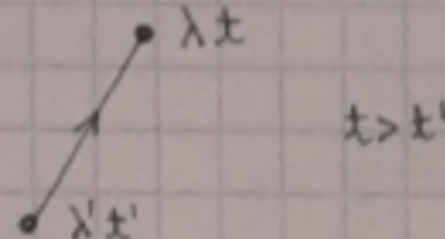
Diagramas de Feynman

REPASO

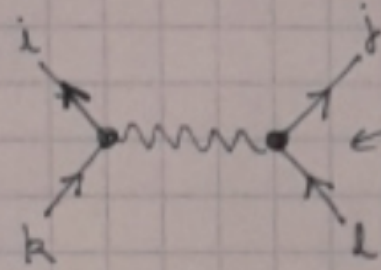
Reglas de Feynman

(1) Eje temporal hacia arriba

(2) $G^{(0)}(\lambda t, \lambda' t')$



(3) $\langle ij | \mathcal{N} | kl \rangle$



vértice interno: una G^0 entra y otra sale.

Las flechas salientes son partículas creadas en la "colisión" y \therefore corresponden a operadores c^\dagger , y las entrantes a c .

■ Coulomb^{no-} relativista es instantánea \rightarrow horizontal (no requerido en caso relat.)

Electrón-fonón es retardada y \therefore no es horizontal.

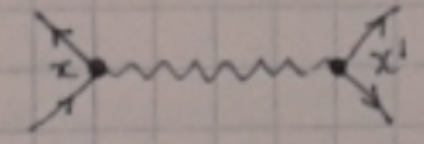
Diagramas de Feynman

REPASO

Ejemplos:

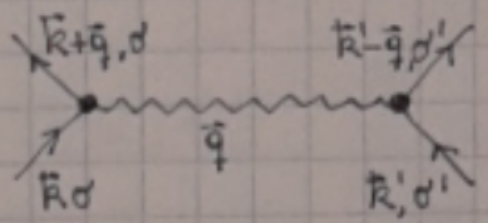
$$N(x, x') = N(\vec{r}, \vec{r}')$$

(local en espacio y ~~no~~ diagonal en spin)



$$N_{\vec{q}} a_{\vec{k}+\vec{q}, \sigma}^{\dagger} a_{\vec{k}'-\vec{q}, \sigma'}^{\dagger} a_{\vec{k}', \sigma'} a_{\vec{k}, \sigma}$$

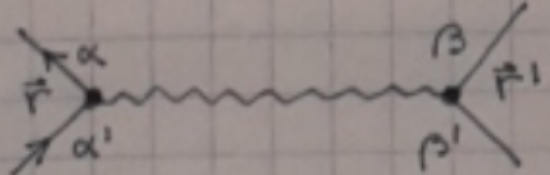
(Potencial invariante translacional)



en los vértices se conserva el momento (incluyendo el \vec{q} de la "partícula" de la interacción).

$$N_{\alpha\beta, \alpha'\beta'}(\vec{r}, \vec{r}')$$

(local en el espacio pero no diagonal en spin)




Amplitud de vacío: Diagramas de Feynman

La amplitud de vacío también es una serie de potencias en la interacción, y el término de orden 1 es (en representación espín-posición):

$$\langle \Phi_0 | U_\epsilon^{(1)} | \Phi_0 \rangle = -i \frac{1}{2} \int dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \sum_{\substack{\lambda\mu \\ \lambda'\mu'}} \int d^3r_1 \int d^3r'_1 v_{\lambda\lambda', \mu\mu'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) M$$

Aparece el siguiente valor medio en el “vacío”:

$$v_{\alpha\alpha', \beta\beta'}(r, r') =$$


$$M = \langle \Phi_0 | \psi_\lambda^\dagger(\mathbf{r}_1 t_1) \psi_\mu^\dagger(\mathbf{r}'_1 t_1) \psi_{\mu'}(\mathbf{r}'_1 t_1) \psi_{\lambda'}(\mathbf{r}_1 t_1) | \Phi_0 \rangle$$

Notar que el operador $T[\dots]$ se fue porque todos los operadores de campo tienen el mismo argumento temporal. Qué hacemos?

Aplicamos el **teorema de Wick** para productos ordinarios (sin orden temporal):

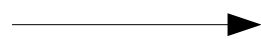
$$\begin{aligned}
 M &= \langle \Phi_0 | \psi_\lambda^\dagger(\mathbf{r}_1 t_1) \psi_\mu^\dagger(\mathbf{r}'_1 t_1) \psi_{\mu'}(\mathbf{r}'_1 t_1) \psi_{\lambda'}(\mathbf{r}_1 t_1) | \Phi_0 \rangle \\
 &= \underbrace{\psi_\lambda^\dagger(\mathbf{r}_1 t_1) \psi_{\lambda'}(\mathbf{r}_1 t_1)} \underbrace{\psi_\mu^\dagger(\mathbf{r}'_1 t_1) \psi_{\mu'}(\mathbf{r}'_1 t_1)} \\
 &\quad - \underbrace{\psi_\lambda^\dagger(\mathbf{r}_1 t_1) \psi_{\mu'}(\mathbf{r}'_1 t_1)} \underbrace{\psi_\mu^\dagger(\mathbf{r}'_1 t_1) \psi_{\lambda'}(\mathbf{r}_1 t_1)}.
 \end{aligned}$$

Notar que en esta versión del teorema aparecen *pairings* en lugar de *contracciones*.

Recordemos

$$\left\{ \begin{aligned}
 \underbrace{\psi(xt) \psi^\dagger(yt')} &= \sum_{\epsilon_j > \epsilon_F} \varphi_j(x) \varphi_j^*(y) e^{i\epsilon_j(t'-t)} \\
 \underbrace{\psi^\dagger(xt) \psi(yt')} &= \sum_{\epsilon_j \leq \epsilon_F} \varphi_j^*(x) \varphi_j(y) e^{i\epsilon_j(t-t')} \\
 \underbrace{\psi^\dagger(xt) \psi^\dagger(yt')} &= 0 = \underbrace{\psi(xt) \psi(yt')}.
 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 iG^{(0)}(yt, xt^+) &= \langle \Phi_0 | T[\psi(yt)\psi^\dagger(xt^+)] | \Phi_0 \rangle \\
 &= -\langle \Phi_0 | \psi^\dagger(xt^+)\psi(yt) | \Phi_0 \rangle \\
 &= -\langle \Phi_0 | \psi^\dagger(xt)\psi(yt) | \Phi_0 \rangle \\
 &= -\langle \Phi_0 | \psi^\dagger(xt)\psi(yt) | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | N[\psi^\dagger(xt)\psi(yt)] | \Phi_0 \rangle \\
 &= -\langle \Phi_0 | \psi^\dagger(xt)\psi(yt) - N[\psi^\dagger(xt)\psi(yt)] | \Phi_0 \rangle \\
 &= -\langle \Phi_0 | \underbrace{\psi^\dagger(xt)\psi(yt)} | \Phi_0 \rangle \\
 &= -\underbrace{\psi^\dagger(xt)\psi(yt)}
 \end{aligned}$$

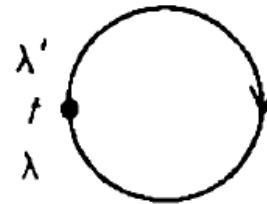


$$\underbrace{\psi^\dagger(xt)\psi(yt)} = -iG^{(0)}(yt, xt^+)$$

Pairing con tiempos iguales

Cuarta Regla de Feynman:

Las funciones de Green con tiempos iguales se interpretan como $G^{(\bar{0})}(\lambda t, \lambda' t^+)$



Estas situaciones siempre vienen de potenciales $v(t)_I$, que tienen asociados 4 operadores de campo con tiempos iguales, con los de creación a la izquierda.

Amplitud de vacío: Diagramas de Feynman

Entonces, volviendo a la amplitud de vacío a primer orden:

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_0 | U_\epsilon^{(1)} | \Phi_0 \rangle &= \\
 &= \frac{i}{2} \int dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \sum_{\substack{\lambda\mu \\ \lambda'\mu'}} \int d^3r_1 \int d^3r'_1 v_{\lambda\lambda',\mu\mu'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) G_{\lambda\lambda'}^{(0)}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_1 t_1^+) G_{\mu\mu'}^{(0)}(\mathbf{r}'_1 t_1, \mathbf{r}'_1 t_1^+) \\
 &\quad - \frac{i}{2} \int dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \sum_{\substack{\lambda\mu \\ \lambda'\mu'}} \int d^3r_1 \int d^3r'_1 v_{\lambda\lambda',\mu\mu'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) G_{\mu'\lambda}^{(0)}(\mathbf{r}'_1 t_1, \mathbf{r}_1 t_1^+) G_{\lambda'\mu}^{(0)}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}'_1 t_1^+)
 \end{aligned}$$

Diagramas de vacío:



Directo



Intercambio

Más reglas para interpretar los diagramas ...

- (5) Todos los índices y coordenadas asociadas a un vértice interno deben ser sumados/integrados. El factor de encendido adiabático $e^{-\epsilon|t|}$ se agrega a todas las integraciones temporales.

Teorema de los lazos, para determinar el signo global:

- (6) El signo de un término de orden arbitrario es $(-1)^\ell$ donde ℓ es el número de lazos cerrados formado por líneas de $G^{(0)}$

El teorema vale para términos de

- la amplitud de vacío
- el numerador de la función de Green

Más reglas para interpretar los diagramas ...

(7) El prefactor de cada término de orden n es: $\left[\frac{(i)^n}{n!2^n} \right]$

(Demostración: p. 231)

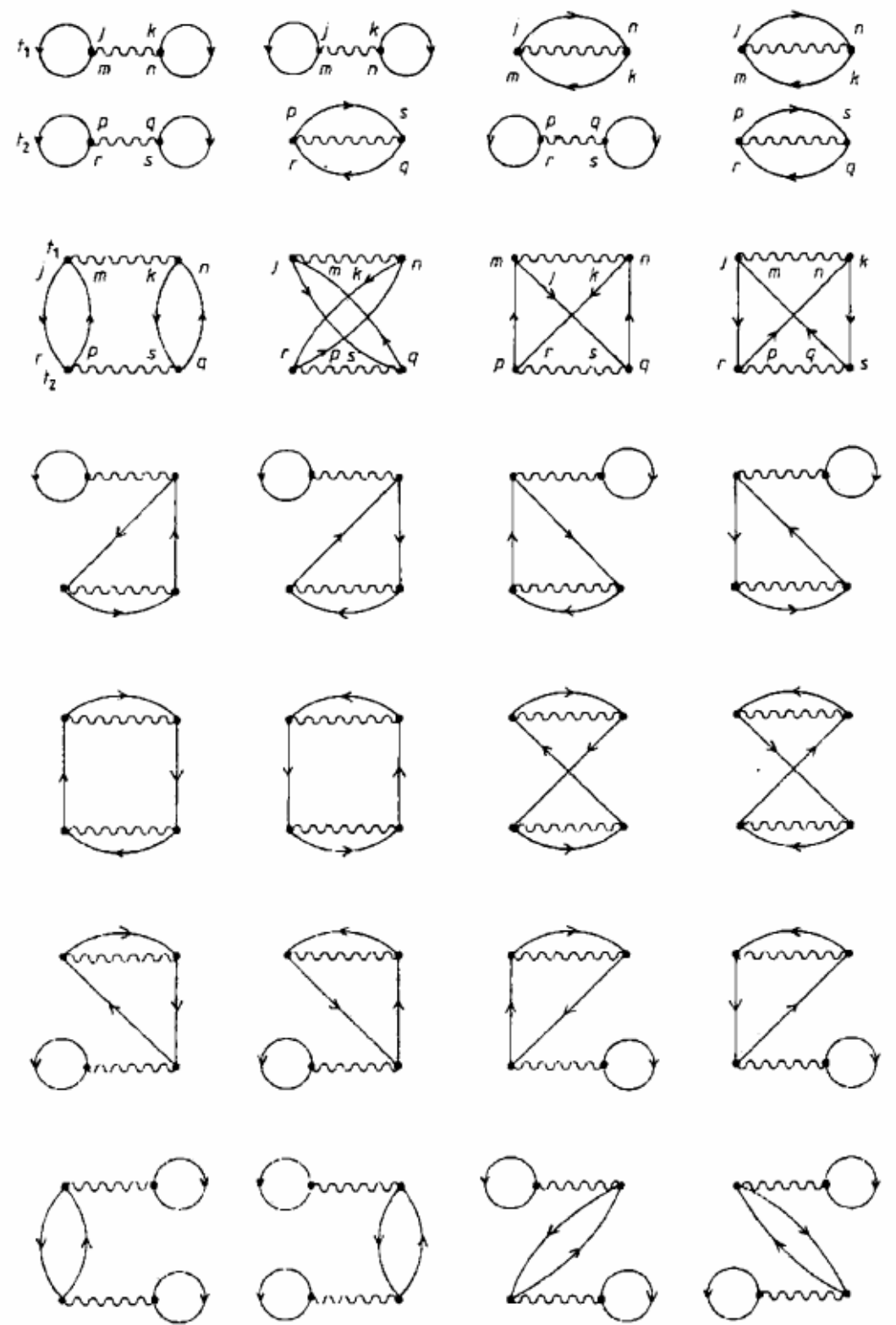
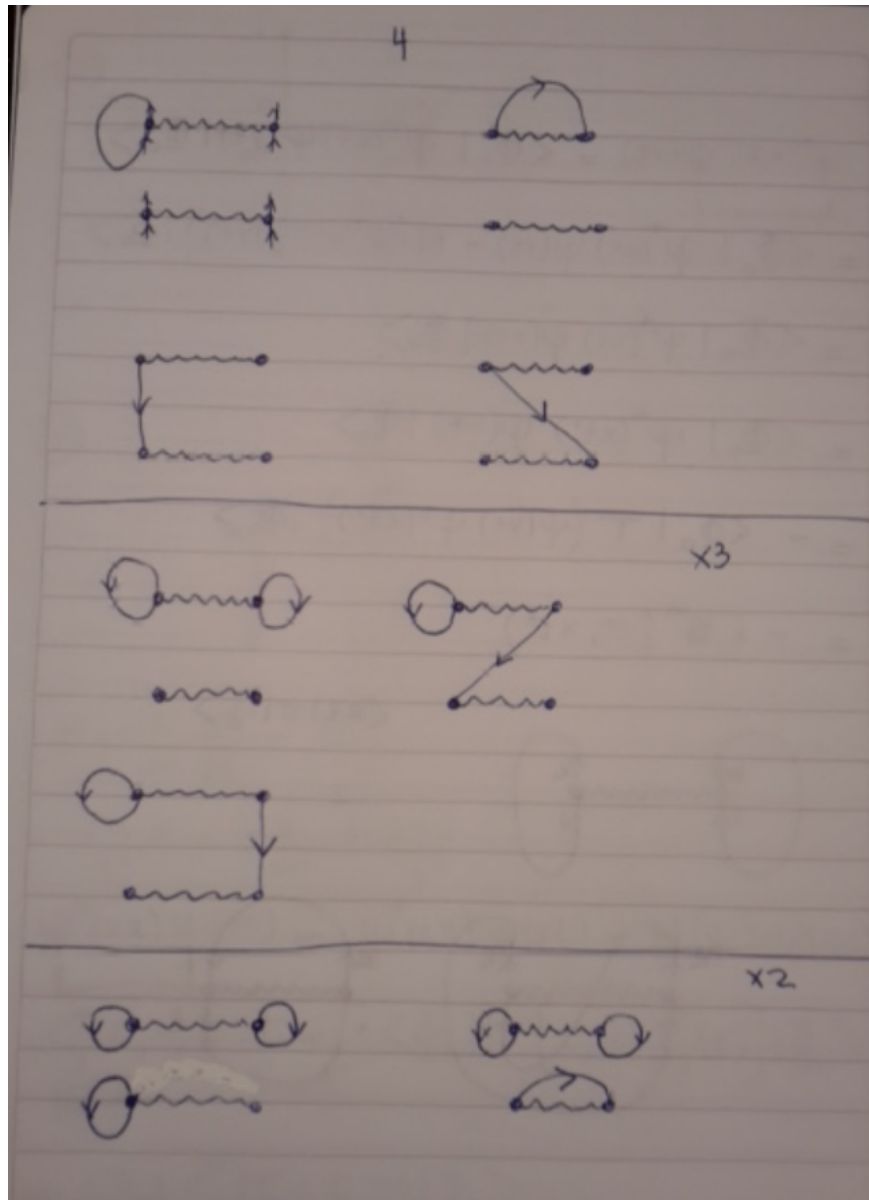
Válido para: $\left\{ \begin{array}{l} \text{amplitud de vacío} \\ \text{numerador de la función de Green} \end{array} \right.$

Cuántos diagramas hay en el orden n ? $\left\{ \begin{array}{l} (2n)! \quad \text{amplitud de vacío} \\ (2n+1)! \quad \text{numerador de la G} \end{array} \right.$

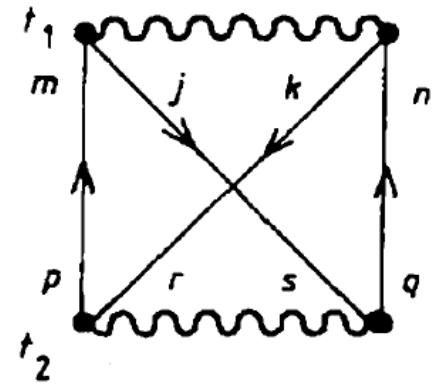
Diagramas de vacío de segundo orden

$n = 2$

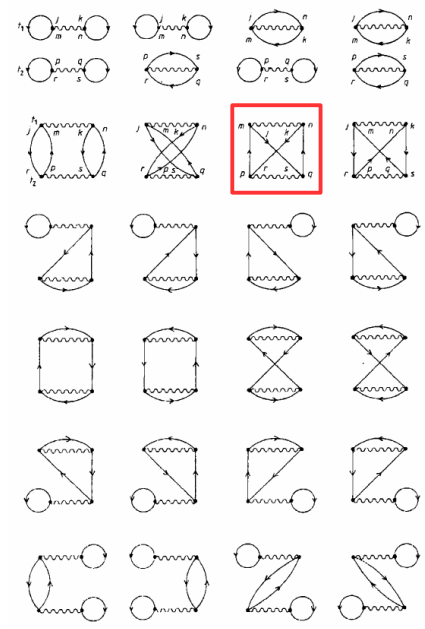
$(2n)! = 4.3.2 = 24$



Diagramas de vacío de segundo orden



Suponiendo
 $t_1 > t_2$

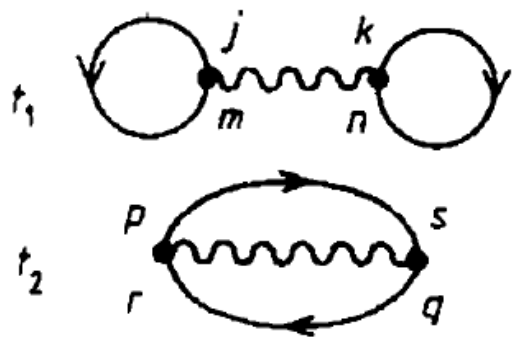


$$(-)^1 \frac{i^2}{2!2^2} \sum_{pqrs} \sum_{jkmn} \int dt_1 \int dt_2 e^{-\epsilon(|t_1|+|t_2|)}$$

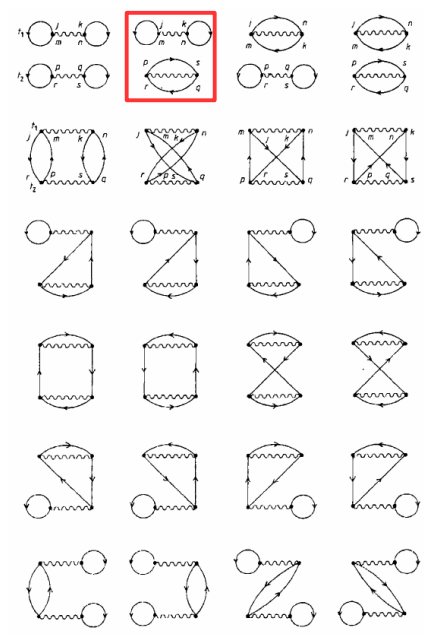
$$\left[\frac{(i)^n}{n!2^n} \right]$$

$$\times \langle pq | v | rs \rangle \langle jk | v | mn \rangle G^{(0)}(mt_1, pt_2) G^{(0)}(st_2, jt_1) \\ G^{(0)}(nt_1, qt_2) G^{(0)}(rt_2, kl_1).$$

Diagramas de vacío de segundo orden



Suponiendo $t_1 > t_2$



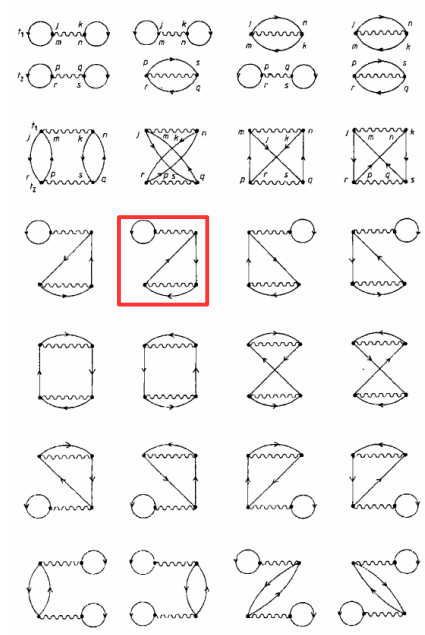
$$(-i)^3 \frac{(-)^2}{2!2^2} \sum_{jkmn} \sum_{pqrs} \int dt_1 \int dt_2 e^{-\epsilon(|t_1|+|t_2|)}$$

$$\times \langle jk | v | mn \rangle \langle pq | v | rs \rangle G^{(0)}(mt_1, jt_1^+) G^{(0)}(nt_1, kt_1^+) \\ G^{(0)}(st_2, pt_2^+) G^{(0)}(rt_2, qt_2^+)$$

$$= \frac{1}{8} \left[\sum_{jkmn} \int dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \langle jk | v | mn \rangle G^{(0)}(mt_1, jt_1^+) G^{(0)}(nt_1, kt_1^+) \right] \\ \times \left[\sum_{pqrs} \int dt_2 e^{-\epsilon|t_2|} \langle pq | v | rs \rangle G^{(0)}(st_2, pt_2^+) G^{(0)}(rt_2, qt_2^+) \right].$$

$$\left[\frac{(i)^n}{n!2^n} \right]$$

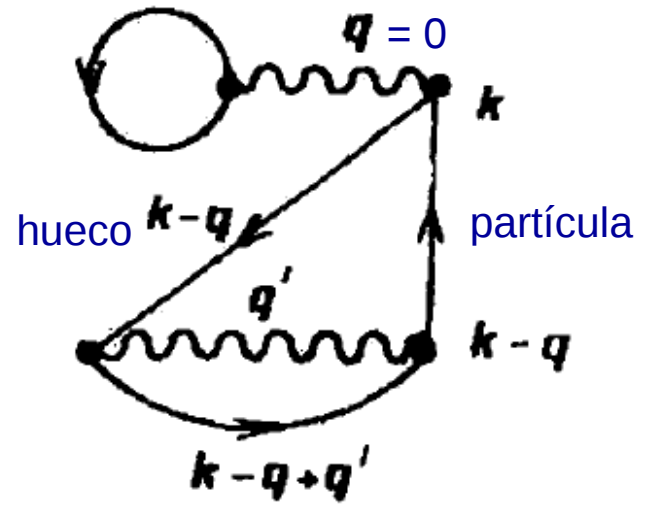
Diagramas de vacío de segundo orden



Muchos diagramas pueden dar cero. Ejemplo:

Invariancia traslacional

$$G_{\alpha\beta}(kt, k't') = \delta_{kk'} G_{\alpha\beta}(kt, kt')$$



→ Un hueco ($k < k_F$) y una partícula ($k > k_F$) tienen el mismo momento k:

Imposible → diagrama = 0

FIN de la clase 21

Diagramas de vacío

Caso de propagadores con tiempos iguales

Reglas de Feynman 4 a 7

Listado de diagramas de vacío de orden 2

Interpretación matemática de 2 diagramas de orden 2

Diagrama desconexo: factorización

Consecuencias de la invariancia traslacional

