

Usamos el término “campo” cuando tratamos con cantidades físicas que dependen de la variable continua posición, como en física clásica los campos eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$.

Ahora nuestros operadores de creación y destrucción se vuelven “campos” en un sentido cuántico: crean y destruyen partículas en la posición \mathbf{r} .

mutation pour des fermions. Ce chapitre constitue une préparation aux Chapitres XIX et XX, où nous introduirons la quantification du champ électromagnétique.

Repaso: Operadores de campo

Partículas sin espín

$$a_{v_s} = \sum_i \langle v_s | u_i \rangle a_{u_i} \longrightarrow \boxed{“ a_{\mathbf{r}} ” = \Psi(\mathbf{r}) = \sum_i u_i(\mathbf{r}) a_i}$$

$\{|v_s\rangle\} \longrightarrow \{|\mathbf{r}\rangle\}$

$\langle \mathbf{r} | u_i \rangle$

$\Psi(\mathbf{r})$ definido así es por supuesto independiente de la base $|u_i\rangle$ elegida

Conjugando:
$$\Psi^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_i u_i^*(\mathbf{r}) a_i^\dagger$$

$$\Psi^\dagger(\mathbf{r}) |0\rangle = \sum_i u_i^*(\mathbf{r}) a_i^\dagger |0\rangle = \sum_i u_i^*(\mathbf{r}) |u_i\rangle = \sum_i |u_i\rangle \langle u_i | \mathbf{r} \rangle = |\mathbf{r}\rangle$$

Crea una partícula en la posición \mathbf{r}

Repaso: Operadores de campo

Partículas con espín S

$$\{|\mathbf{r}\rangle\} \longrightarrow \{|\mathbf{r}, \nu\rangle\} \quad \nu = -S, -S+1, \dots, +S$$

$$|u_i\rangle = \sum_{\nu=-S}^{+S} \int d^3r u_i(\mathbf{r}, \nu) |\mathbf{r}, \nu\rangle$$

$$u_i^\nu(\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}, \nu) = \langle \mathbf{r}, \nu | u_i \rangle$$

$$a_{v_s} = \sum_i \langle v_s | u_i \rangle a_{u_i} \longrightarrow \Psi_\nu(\mathbf{r}) = \sum_i \langle \mathbf{r}, \nu | u_i \rangle a_i = \sum_i u_i^\nu(\mathbf{r}) a_i$$

Notar que el índice i es el conjunto indices de la base,
por ejemplo: $i = (n, l, m, m_s)$ o (k_x, k_y, k_z, m_s)

Repaso: Operadores de campo

Operadores de partícula única

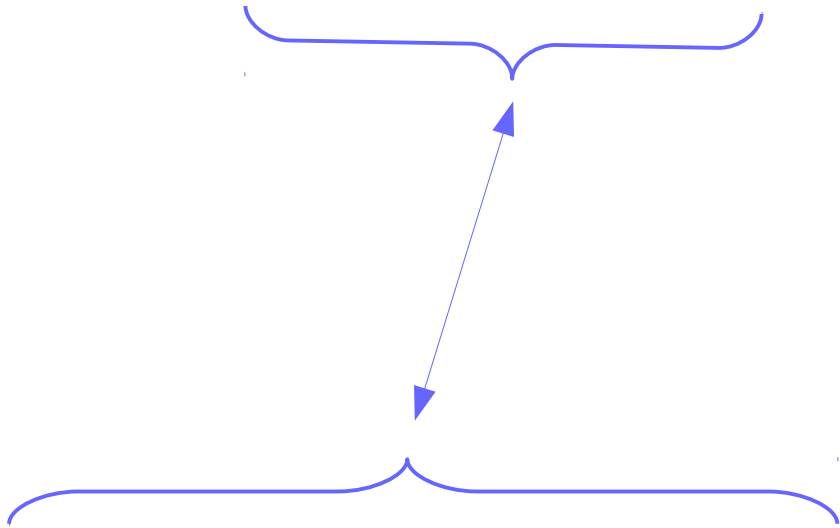
$$\int d^3r u_i^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) = a_i$$

$$\int d^3r u_i(\mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r}) = a_i^\dagger$$

$$\hat{F} = \sum_{k,l} \langle u_k | \hat{f} | u_l \rangle a_k^\dagger a_l$$

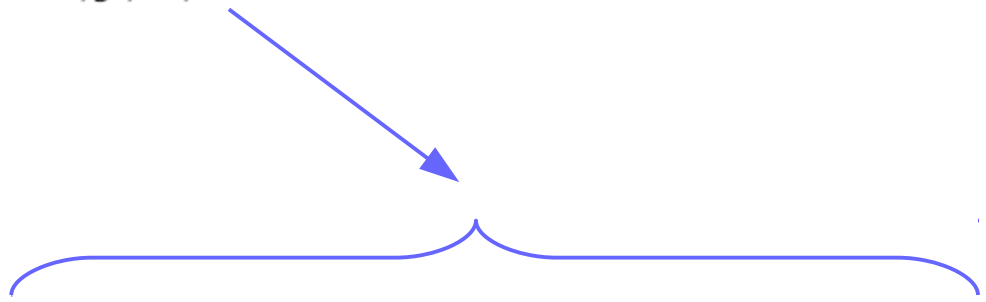
$$\hat{F} = \int d^3r \int d^3r' \langle \mathbf{r} | \hat{f} | \mathbf{r}' \rangle \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}')$$

$$\hat{F} = \int d^3r \int d^3r' \langle \mathbf{r} | \hat{f} | \mathbf{r}' \rangle \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}')$$



$$\hat{F} = \int d^3r \int d^3r' \sum_{\nu=-S}^S \sum_{\nu'=-S}^S \langle \mathbf{r}, \nu | \hat{f} | \mathbf{r}', \nu' \rangle \Psi_\nu^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{\nu'}(\mathbf{r}')$$

$$\hat{G} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \langle 1 : u_i; 2 : u_j | \hat{g}(1, 2) | 1 : u_k; 2 : u_l \rangle a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k$$



$$\hat{G} = \frac{1}{2} \int d^3 r \int d^3 r' \int d^3 r'' \int d^3 r''' \langle 1 : \mathbf{r}; 2 : \mathbf{r}' | \hat{g} | 1 : \mathbf{r}''; 2 : \mathbf{r}''' \rangle \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}''') \Psi(\mathbf{r}'')$$

Ejemplos de operadores de una partícula

Operador densidad:

En primera cuantización: $\hat{f} = |\mathbf{r}_0\rangle \langle \mathbf{r}_0|$

Partiendo de la ecuación general: $\hat{F} = \sum_{k,l} \langle u_k | \hat{f} | u_l \rangle a_k^\dagger a_l$

Obtenemos:
$$\begin{aligned} \hat{D}(\mathbf{r}_0) &= \sum_{k,l} u_k^*(\mathbf{r}_0) u_l(\mathbf{r}_0) a_k^\dagger a_l \\ &= \sum_k u_k^*(\mathbf{r}_0) a_k^\dagger \sum_l u_l(\mathbf{r}_0) a_l \\ &= \Psi^\dagger(\mathbf{r}_0) \Psi(\mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

$$J = \sum_{i=1}^N J(x_i) \quad (2.5)$$

$$\hat{J} = \sum_{r,s} \langle r | J | s \rangle c_r^\dagger c_s$$

$$= \sum_{r,s} \langle r | \int dx |x\rangle \langle x | J | s \rangle c_r^\dagger c_s$$

$$= \int dx \sum_{r,s} \langle r | x \rangle \langle x | J | s \rangle c_r^\dagger c_s$$

$$= \int dx \sum_{r,s} \varphi_r^*(x) J(x) \varphi_s(x) c_r^\dagger c_s$$

$$= \int dx \left(\sum_r \varphi_r^*(x) c_r^\dagger \right) J(x) \left(\sum_s \varphi_s(x) c_s \right)$$

$$= \int dx \psi^\dagger(x) J(x) \psi(x) \quad (2.6)$$

Operador de densidad numérica:

$$n(x) = \sum_{i=1}^N \delta(x-x_i) \quad (2.7)$$

Como operador de partícula única: $\delta(x-x_i) = \hat{d}(x)$ ya en la rep. de coord.

$$\hat{d} = \int dx \psi^\dagger(x) \delta(x-x_i) \psi(x)$$

$$= \hat{\psi}^\dagger(x_i) \hat{\psi}(x_i) \quad (2.8)$$

$$\hat{d} = \sum_{r,s} \langle r | \hat{d} | s \rangle c_r^\dagger c_s$$

$$= \int dx \sum_{r,s} \langle r | x \rangle \langle x | \hat{d} | s \rangle c_r^\dagger c_s$$

$$= \int dx \sum_{r,s} \varphi_r^*(x) \delta(x-x_i) \varphi_s(x) c_r^\dagger c_s$$

$$= \sum_{r,s} \varphi_r^*(x_i) \varphi_s(x_i) c_r^\dagger c_s$$

$$= \hat{\psi}^\dagger(x_i) \hat{\psi}(x_i) \quad (2.8)$$

Jellium model – modelo simple de un metal: electrones interactuantes en un medio uniforme de carga positiva para asegurar la neutralidad de carga.

Nos interesa el “bulk”, o sea, un sistema de volumen infinito, pero tomamos una caja de lado L y al final tomamos el límite $L \rightarrow \infty$

Estados de partícula única: $\psi_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) = V^{-\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \eta_{\lambda}$ $V(\equiv L^3)$

Estados de espín up y down en z: $\eta_{\uparrow} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\eta_{\downarrow} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Con condiciones periódicas de contorno tenemos como en Estructura 2:

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L} \quad i = x, y, z \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Gas de electrones: Jellium model

$$H = H_{el} + H_b + H_{el-b}$$

$$H_{el} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} e^2 \sum_{i \neq j}^N \frac{e^{-\mu |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

$$H_b = \frac{1}{2} e^2 \iint d^3x d^3x' \frac{n(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}') e^{-\mu |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

$$H_{el-b} = -e^2 \sum_{i=1}^N \int d^3x \frac{n(\mathbf{x}) e^{-\mu |\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|}$$

Gas de electrones degenerado

$$H = H_{el} + H_b + H_{el-b}$$

$$H_{el} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} e^2 \sum_{i \neq j}^N \frac{e^{-\mu|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

$$H_b = \frac{1}{2} e^2 \iint d^3x d^3x' \frac{n(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}') e^{-\mu|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

$$H_{el-b} = -e^2 \sum_{i=1}^N \int d^3x \frac{n(\mathbf{x}) e^{-\mu|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|}$$

“Limite termodinámico” $\begin{cases} N \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty \end{cases}$ Pero con $n = N/V$ constante

La interacción Coulombiana es de largo alcance, y entonces los 3 términos de arriba divergen por separado si no ponemos la exponencial (Yukawa).

Pero al final haremos: $L \rightarrow \infty$ and then $\mu \rightarrow 0$

O sea, siempre contamos con que en cada paso del cálculo: $\mu^{-1} \ll L$

Gas de electrones: Jellium model

$$H = H_{el} + H_b + H_{el-b}$$

La interacción Coulombiana del background positivo es algo clásico que se puede calcular:

$$H_b = \frac{1}{2} e^2 \iint d^3x d^3x' \frac{n(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}') e^{-\mu|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

La densidad del background es uniforme en este modelo: $n(\mathbf{x}) = N/V$

→

$$\begin{aligned} H_b &= \frac{1}{2} e^2 \left(\frac{N}{V}\right)^2 \iint d^3x d^3x' \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= \frac{1}{2} e^2 \left(\frac{N}{V}\right)^2 \int d^3x \int d^3z \frac{e^{-\mu z}}{z} \\ &= \frac{1}{2} e^2 \frac{N^2}{V} \frac{4\pi}{\mu^2} \end{aligned}$$

$N^{-1} H_b$ diverge cuando $\mu \rightarrow 0$

Gas de electrones: Jellium model

$$H = H_{el} + H_b + H_{el-b}$$

La interacción de los electrones con el background también se puede tratar gracias a la invariancia traslacional del background:

$$H_{el-b} = -e^2 \sum_{i=1}^N \int d^3x \frac{n(\mathbf{x}) e^{-\mu|\mathbf{x}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_i|}$$

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}) = N/V \quad \longrightarrow \quad H_{el-b} &= -e^2 \sum_{i=1}^N \frac{N}{V} \int d^3x \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_i|} \\ &= -e^2 \sum_{i=1}^N \frac{N}{V} \int d^3z \frac{e^{-\mu z}}{z} \\ &= -e^2 \frac{N^2}{V} \frac{4\pi}{\mu^2} \end{aligned}$$

Este término del Hamiltoniano también es un número, no un operador para electrones

Gas de electrones: Jellium model

El Hamiltoniano quedó reducido a: $H = -\frac{1}{2}e^2 N^2 V^{-1} 4\pi\mu^{-2} + H_{el}$

$$H_{el} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} e^2 \sum_{i \neq j}^N \frac{e^{-\mu|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

Ahora pasamos a **segunda cuantización**.

$$\hat{F} = \sum_{k,l} \langle u_k | \hat{f} | u_l \rangle a_k^\dagger a_l$$

Término de **Energía cinética**:

$$\langle \mathbf{k}_1 \lambda_1 | T | \mathbf{k}_2 \lambda_2 \rangle = (2mV)^{-1} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} \eta_{\lambda_1}^\dagger (-\hbar^2 \nabla^2) e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} \eta_{\lambda_2}$$

$$= \frac{\hbar^2 k_2^2}{2mV} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \int d^3x e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}}$$

$$= \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}$$

$$\int d^3x e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}} = V \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}$$



$$\hat{T} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}$$

Gas de electrones: Jellium model

$$H_{el} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} e^2 \sum_{i \neq j}^N \frac{e^{-\mu|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

Término de **interacción e-e, energía potencial** es operador de 2 partículas:

$$\hat{G} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \langle 1 : u_i; 2 : u_j | \hat{g}(1, 2) | 1 : u_k; 2 : u_l \rangle a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k$$

Tenemos que calcular el elemento de matriz:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2 | V | \mathbf{k}_3 \lambda_3 \mathbf{k}_4 \lambda_4 \rangle &= \frac{e^2}{V^2} \iint d^3x_1 d^3x_2 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \eta_{\lambda_1}(1)^\dagger \\ &\quad \times e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \eta_{\lambda_2}(2)^\dagger \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \\ &\quad \times e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}_1} \eta_{\lambda_3}(1) e^{i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{x}_2} \eta_{\lambda_4}(2) \end{aligned}$$

Gas de electrones: Jellium model

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2 | V | \mathbf{k}_3 \lambda_3 \mathbf{k}_4 \lambda_4 \rangle &= \frac{e^2}{V^2} \iint d^3x_1 d^3x_2 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \eta_{\lambda_1}(1)^\dagger \\ &\quad \times e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \eta_{\lambda_2}(2)^\dagger \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \\ &\quad \times e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}_1} \eta_{\lambda_3}(1) e^{i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{x}_2} \eta_{\lambda_4}(2)\end{aligned}$$

Sustituyendo: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ and $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2 | V | \mathbf{k}_3 \lambda_3 \mathbf{k}_4 \lambda_4 \rangle &= \frac{e^2}{V^2} \int d^3x e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \int d^3y e^{i(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{y}} \frac{e^{-\mu y}}{y} \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} \\ &= \frac{e^2}{V} \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} \frac{4\pi}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)^2 + \mu^2}\end{aligned}$$

Gas de electrones: Jellium model

El Hamiltoniano queda hasta ahora:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{e^2 N^2 4\pi}{V \mu^2} + \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{e^2}{2V} \\ \times \sum_{\mathbf{k}_1 \lambda_1} \sum_{\mathbf{k}_2 \lambda_2} \sum_{\mathbf{k}_3 \lambda_3} \sum_{\mathbf{k}_4 \lambda_4} \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} \\ \times \frac{4\pi}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)^2 + \mu^2} a_{\mathbf{k}_1 \lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2 \lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_4 \lambda_4} a_{\mathbf{k}_3 \lambda_3}$$

Cambio de variable:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k} + \mathbf{q} \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{q} \quad \mathbf{k}_4 = \mathbf{p}$$

Asegura que: $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$.

Y define: $\hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) = \hbar\mathbf{q}$

Gas de electrones: Jellium model

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{e^2 N^2 4\pi}{V \mu^2} + \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{e^2}{2V}$$

$$\times \sum_{\mathbf{k}_1 \lambda_1} \sum_{\mathbf{k}_2 \lambda_2} \sum_{\mathbf{k}_3 \lambda_3} \sum_{\mathbf{k}_4 \lambda_4} \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}$$

$$\times \frac{4\pi}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)^2 + \mu^2} a_{\mathbf{k}_1 \lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2 \lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_4 \lambda_4} a_{\mathbf{k}_3 \lambda_3}$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k} + \mathbf{q} \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{q} \quad \mathbf{k}_4 = \mathbf{p}$$

→

$$\frac{e^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{4\pi}{q^2 + \mu^2} a_{\mathbf{k} + \mathbf{q}, \lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{p} - \mathbf{q}, \lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{p}\lambda_2} a_{\mathbf{k}\lambda_1}$$

Separamos el término $\mathbf{q} = 0$

$$\frac{e^2}{2V} \sum'_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{4\pi}{q^2 + \mu^2} a_{\mathbf{k} + \mathbf{q}, \lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{p} - \mathbf{q}, \lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{p}\lambda_2} a_{\mathbf{k}\lambda_1}$$

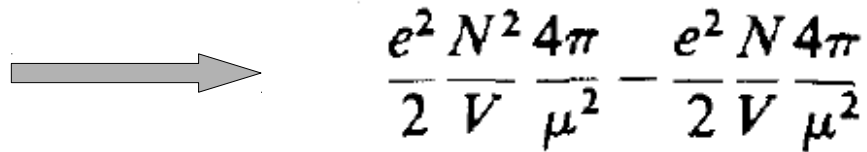
$$+ \frac{e^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{4\pi}{\mu^2} a_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{p}\lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{p}\lambda_2} a_{\mathbf{k}\lambda_1}$$

Gas de electrones: Jellium model

El término de $q=0$ se puede escribir como:

$$\frac{e^2}{2V} \frac{4\pi}{\mu^2} \sum_{\mathbf{k}\lambda_1} \sum_{\mathbf{p}\lambda_2} a_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda_1} (a_{\mathbf{p}\lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{p}\lambda_2} - \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \delta_{\lambda_1\lambda_2}) = \frac{e^2}{2V} \frac{4\pi}{\mu^2} (\hat{N}^2 - \hat{N})$$

Número fijo de partículas: $\hat{N} \longrightarrow N$


$$\frac{e^2 N^2 4\pi}{2V \mu^2} - \frac{e^2 N 4\pi}{2V \mu^2}$$

Se cancela con el otro término de H

$-\frac{1}{2} 4\pi e^2 (V \mu^2)^{-1}$ por partícula

Se va a cero al hacer: $L \rightarrow \infty$

Y después: $\mu \rightarrow 0$

Gas de electrones: Jellium model

Y así obtenemos:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{e^2}{2V} \sum'_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} \sum_{\lambda_1\lambda_2} \frac{4\pi}{q^2} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{p}-\mathbf{q},\lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{p}\lambda_2} a_{\mathbf{k}\lambda_1}$$

Adimensionalización. Introducimos r_0 distancia entre partículas: $V \equiv \frac{4}{3}\pi r_0^3 N$

Radio de Bohr: $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \longrightarrow r_s \equiv \frac{r_0}{a_0}$

$$\bar{V} = r_0^{-3} V \quad \bar{\mathbf{k}} = r_0 \mathbf{k} \quad \bar{\mathbf{p}} = r_0 \mathbf{p} \quad \bar{\mathbf{q}} = r_0 \mathbf{q}$$

$$\hat{H} = \frac{e^2}{a_0 r_s^2} \left(\sum_{\bar{\mathbf{k}}\lambda} \frac{1}{2} \bar{k}^2 a_{\bar{\mathbf{k}}\lambda}^\dagger a_{\bar{\mathbf{k}}\lambda} + \frac{r_s}{2\bar{V}} \sum'_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{q}}} \sum_{\lambda_1\lambda_2} \frac{4\pi}{\bar{q}^2} a_{\bar{\mathbf{k}}+\bar{\mathbf{q}},\lambda_1}^\dagger a_{\bar{\mathbf{p}}-\bar{\mathbf{q}},\lambda_2}^\dagger a_{\bar{\mathbf{p}}\lambda_2} a_{\bar{\mathbf{k}}\lambda_1} \right)$$

Gas de electrones: Jellium model

$$\hat{H} = \frac{e^2}{a_0 r_s^2} \left(\sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \tilde{k}^2 a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{r_s}{2\bar{V}} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}' \sum_{\lambda_1\lambda_2} \frac{4\pi}{\tilde{q}^2} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{p}-\mathbf{q},\lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{p}\lambda_2} a_{\mathbf{k}\lambda_1} \right)$$

$$r_s \equiv \frac{r_0}{a_0}$$

Esta expresión muestra un resultado anti-intuitivo: a alta densidad, o sea cuando $r_s \rightarrow 0$ la energía potencial se vuelve una perturbación de la energía cinética.

Entonces, a densidad alta se puede intentar un desarrollo perturbativo de, por ejemplo, la energía del estado fundamental (ground state).

Se obtiene:

$$E = \frac{Ne^2}{a_0 r_s^2} (a + br_s + cr_s^2 \ln r_s + dr_s^2 + \dots)$$

Ahora calculamos a y b.

Gas de electrones: Jellium model

Volvamos al Hamiltoniano con unidades físicas:

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}$$

Electrones no interactuantes:
exclusión de Pauli, esfera de Fermi

$$\hat{H}_1 = \frac{e^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} \sum_{\lambda_1\lambda_2} \frac{4\pi}{q^2} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\lambda_1}^\dagger a_{\mathbf{p}-\mathbf{q},\lambda_2}^\dagger a_{\mathbf{p}\lambda_2} a_{\mathbf{k}\lambda_1}$$

Si expandimos la energía: $E^{(0)} + E^{(1)} + \dots$

$|F\rangle$

Estado fundamental
no interactuante

Order cero,
no interactuante

Corrección a primer order,
debida a la interacción e-e