Ejercicio 2.3

Enunciado

Trabajar el conmutador
$$[a_i^\dagger\, a_j\,,\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n]$$
para bosones y fermiones, hasta reducirlo a la suma de productos de cuatro operadores.

Resolución

Comenzamos utilizando la propiedad
$$[A, B\, C] = B\,[A, C] + [A, B]\, C \tag{1}$$
para reducir el conmutador a operaciones entre sólo dos operadores:
$$\begin{aligned}
[a_i^\dagger\, a_j\,,\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n] &= a_i^\dagger\,[a_j\,,\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n] + [a_i^\dagger\,,\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n]\, a_j \\
&= a_i^\dagger\, a_k^\dagger\,[a_j\,,\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n] + a_i^\dagger\,[a_j\,,\, a_k^\dagger]\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n \\
&+ a_k^\dagger\,[a_i^\dagger\,,\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n]\, a_j + [a_i^\dagger\,,\, a_k^\dagger]\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n\, a_j \\
&= a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\,[a_j\,,\, a_m\, a_n] + a_i^\dagger\, a_k^\dagger\,[a_j\,,\, a_l^\dagger]\, a_m\, a_n \\
&+ a_k^\dagger\, a_l^\dagger\,[a_i^\dagger\,,\, a_m\, a_n]\, a_j + a_k^\dagger\,[a_i^\dagger\,,\, a_l^\dagger]\, a_m\, a_n\, a_j \\
&+ a_i^\dagger\,[a_j\,,\, a_k^\dagger]\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n + [a_i^\dagger\,,\, a_k^\dagger]\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n\, a_j \\
&= a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\,[a_j\,,\, a_n] + a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\,[a_j\,,\, a_m]\, a_n \\
&+ a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\,[a_i^\dagger\,,\, a_n]\, a_j + a_k^\dagger\, a_l^\dagger\,[a_i^\dagger\,,\, a_m]\, a_n\, a_j \\
&+ a_i^\dagger\, a_k^\dagger\,[a_j\,,\, a_l^\dagger]\, a_m\, a_n + a_k^\dagger\,[a_i^\dagger\,,\, a_l^\dagger]\, a_m\, a_n\, a_j \\
&+ a_i^\dagger\,[a_j\,,\, a_k^\dagger]\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n + [a_i^\dagger\,,\, a_k^\dagger]\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n\, a_j
\end{aligned} \tag{2}$$
Notamos que el resultado final
$$\begin{aligned}
[a_i^\dagger\, a_j\,,\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n] = a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\,[a_j\,,\, a_n] + a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\,[a_j\,,\, a_m]\, a_n + a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\,[a_i^\dagger\,,\, a_n]\, a_j + a_k^\dagger\, a_l^\dagger\,[a_i^\dagger\,,\, a_m]\, a_n\, a_j \\
+ a_i^\dagger\, a_k^\dagger\,[a_j\,,\, a_l^\dagger]\, a_m\, a_n + a_k^\dagger\,[a_i^\dagger\,,\, a_l^\dagger]\, a_m\, a_n\, a_j + a_i^\dagger\,[a_j\,,\, a_k^\dagger]\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n + [a_i^\dagger\,,\, a_k^\dagger]\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n\, a_j
\end{aligned} \tag{3}$$
es válido tanto para bosones como para fermiones. Ahora vamos a hacer uso de las relaciones canónicas de conmutación. Para bosones, éstas son
$$[a_i, a_j] = 0 \qquad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \qquad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{4}$$
Por lo tanto, los únicos términos que sobreviven en (3) son los que tienen un conmutador entre un operador de creación y uno de destrucción:
$$\begin{aligned}
[a_i^\dagger\, a_j\,,\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n]_b &= a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\,[a_i^\dagger\,,\, a_n]\, a_j + a_k^\dagger\, a_l^\dagger\,[a_i^\dagger\,,\, a_m]\, a_n\, a_j \\
&+ a_i^\dagger\, a_k^\dagger\,[a_j\,,\, a_l^\dagger]\, a_m\, a_n + a_i^\dagger\,[a_j\,,\, a_k^\dagger]\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n.
\end{aligned} \tag{5}$$
Reemplazando esos conmutaodres por la delta de Kronecker correspondiente, llegamos a que para bosones vale
$$\boxed{\begin{aligned}
[a_i^\dagger\, a_j\,,\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n]_b &= \delta_{jl}\, a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_m\, a_n + \delta_{jk}\, a_i^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n \\
&- \delta_{in}\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_j - \delta_{im}\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_n\, a_j.
\end{aligned}} \tag{6}$$

Ahora pasemos al caso fermiónico. Ahora las relaciones son
$$\{a_i, a_j\} = 0 \qquad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \qquad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}. \tag{7}$$
A partir de ellas es sencillo deducir cuál es el resultado del conmutador entre operadores creación y destrucción. Por un lado, tenemos
$$\{a_i, a_j\} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_i\, a_j = -a_j\, a_i \tag{8}$$
y
$$\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_i^\dagger\, a_j^\dagger = -a_j^\dagger\, a_i^\dagger. \tag{9}$$
Entonces,
$$\begin{aligned}
[a_i, a_j] &= a_i\, a_j - a_j\, a_i \\
&= a_i\, a_j - (-a_i\, a_j). \\
&= 2\, a_i\, a_j
\end{aligned} \tag{10}$$
Analogamente,
$$[a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 2\, a_i^\dagger\, a_j^\dagger. \tag{11}$$

El último conmutador de interés es

$$
\begin{aligned}
[a_i, a_j^\dagger] &= a_i\, a_j^\dagger - a_j^\dagger\, a_i \\
&= a_i\, a_j^\dagger - a_j^\dagger\, a_i + (a_i\, a_j^\dagger - a_i\, a_j^\dagger) \\
&= 2\, a_i\, a_j^\dagger - (a_i\, a_j^\dagger + a_j^\dagger\, a_i) \qquad . \\
&= 2\, a_i\, a_j^\dagger - \{a_i, a_j^\dagger\} \\
&= 2\, a_i\, a_j^\dagger - \delta_{ij}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Insertando estos resultados en (3) llegamos a

$$
\begin{aligned}
[a_i^\dagger\, a_j\, ,\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n]_f = {} & \underbrace{2\, a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_j\, a_n}_{(1)} + \underbrace{2\, a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_j\, a_m\, a_n}_{(1)} - \underbrace{2\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n\, a_i^\dagger\, a_j}_{(3)} - \underbrace{2\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_i^\dagger\, a_n\, a_j}_{(3)} \\
& + \underbrace{2\, a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_j\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n}_{(4)} + \underbrace{2\, a_k^\dagger\, a_i^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n\, a_j}_{(2)} + \underbrace{2\, a_i^\dagger\, a_j\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n}_{(4)} + \underbrace{2\, a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n\, a_j}_{(2)} \\
& + \delta_{in}\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_j + \delta_{im} a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_n\, a_j - \delta_{jl}\, a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_m\, a_n - \delta_{jk}\, a_i^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Ahora vamos a permutar todos los conmutadores para llevar los índices a la forma $\{i, j, k, l, m, n\}$. Los términos con un (1) y un (2) abajo se anulan entre ellos, pues

$$
a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_j\, a_n = -a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_j\, a_m\, a_n \tag{14}
$$

y

$$
a_k^\dagger\, a_i^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n\, a_j = -a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n\, a_j. \tag{15}
$$

Los términos con un (3) y un (4) abajo escupen deltas, pues

$$
a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n\, a_i^\dagger\, a_j = -a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_i^\dagger\, a_n\, a_j + \delta_{in}\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_j \tag{16}
$$

y

$$
a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_j\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n = -a_i^\dagger\, a_j\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n + \delta_{jk}\, a_i^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n. \tag{17}
$$

Por lo tanto, el resultado final para fermiones es

$$
\boxed{
\begin{aligned}
[a_i^\dagger\, a_j\, ,\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n]_f = {} & \delta_{im}\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_n\, a_j + \delta_{jk}\, a_i^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_n \\
& - \delta_{in}\, a_k^\dagger\, a_l^\dagger\, a_m\, a_j - \delta_{jl}\, a_i^\dagger\, a_k^\dagger\, a_m\, a_n.
\end{aligned}
}
\tag{18}
$$