Escribimos,

$$H = \sum_{ij} \langle i\,|T|\,j\rangle\, c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2}\sum_{ijkl} \langle ij\,|V|\,kl\rangle\, c_i^\dagger c_j^\dagger c_l c_k, \tag{1}$$

con $c^\dagger, c = b^\dagger, b$ ó $a^\dagger, a$; según se consideren bosones o fermiones.

Queremos ver que $N = \int d\mathbf{x}\, \psi^\dagger(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$ conmuta con $H$.

Notemos que $N$ está escrito en términos de operadores de campo, es decir, en la base de autoestados del operador posición $\{\mathbf{x}\}$, mientras que $H$ está dado en la base, digamos $\{u_i\}$, cuyos operadores de creación y destrucción asociados son $c^\dagger$ y $c$.

Por supuesto que $N = \sum_i c_i^\dagger c_i$ en la base $\{u_i\}$. Esta expresión se puede obtener aplicando las ecuaciones de cambio de base que vimos al principio de la clase 4:

$$\begin{cases} \psi^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_i \langle \mathbf{x}|\, u_i\rangle^*\, c_i^\dagger = \sum_i \psi^*_{u_i}(\mathbf{x}) c_i^\dagger \\ \psi(\mathbf{x}) \;\; = \sum_j \langle \mathbf{x}|\, u_j\rangle\, c_j = \sum_j \psi_{u_j}(\mathbf{x}) c_j \end{cases} \implies$$

$$\implies \quad N = \int d\mathbf{x}\, \psi^\dagger(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = \sum_{ij} c_i^\dagger c_j \int d\mathbf{x}\, \psi^*_{u_i}(\mathbf{x})\psi_{u_j}(\mathbf{x}) = \sum_i c_i^\dagger c_i,$$

pues $\int d\mathbf{x}\, \psi^*_{u_i}(\mathbf{x})\psi_{u_j}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}$ (estamos asumiendo que la base $\{u_i\}$ es ortonormal).

Yendo al punto,

$$[N,H] = [N, T+V] = [N,T] + [N,V]$$

Aquí, $[N,T] = \left[\sum_i c_i^\dagger c_i, \sum_{jk} \langle j\,|T|\,k\rangle\, c_j^\dagger c_k\right] = \sum_{ijk} \langle j\,|T|\,k\rangle \left[c_i^\dagger c_i, c_j^\dagger c_k\right]$, donde,

$$\left[c_i^\dagger c_i, c_j^\dagger c_k\right] = c_i^\dagger c_i c_j^\dagger c_k - c_j^\dagger c_k c_i^\dagger c_i$$

Veamos que este conmutador es cero. Trabajemos con el segundo término, $c_j^\dagger c_k c_i^\dagger c_i$, veamos que es igual al primer término y en consecuencia que el resultado de arriba es nulo.

Recordemos las reglas de conmutación/anticonmutación:

$$[c_i, c_j]_{-\eta} = 0, \qquad \left[c_i^\dagger, c_j^\dagger\right]_{-\eta} = 0, \qquad \left[c_i, c_j^\dagger\right]_{-\eta} = \delta_{ij}\ , \tag{2}$$

con [1]$[A,B]_{-\eta} = AB - \eta BA$, y $\eta = 1$ ó $-1$ según se trabaje con bosones o fermiones respectivamente.

Luego, comencemos llevando $c_i^\dagger$ adelante,

$$c_j^\dagger c_k {\color{red}c_i^\dagger} c_i = c_j^\dagger(\delta_{ik} + \eta c_i^\dagger c_k) c_i = \eta c_j^\dagger {\color{red}c_i^\dagger} c_k c_i + \delta_{ik} c_j^\dagger c_i = \eta^2 {\color{red}c_i^\dagger} c_j^\dagger c_k c_i + \delta_{ik} c_j^\dagger c_i$$

[1]Notemos que $[A,B]_{-\eta} = AB - \eta BA \implies AB = [A,B]_{-\eta} + \eta BA$, que es lo que terminamos usando en los problemas.

Llevemos ahora $c_i$ al segundo lugar,

$$\eta^2 c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_i + \delta_{ik} c_j^\dagger c_i = \eta^3 c_i^\dagger c_j^\dagger c_i c_k + \delta_{ik} c_j^\dagger c_i = \eta^3 c_i^\dagger (-\eta\delta_{ij} + \eta c_i c_j^\dagger) c_k + \delta_{ik} c_j^\dagger c_i$$

en el último paso permutamos $c_j^\dagger c_i$ usando que $\left[c_i, c_j^\dagger\right]_{-\eta} = \delta_{ij} \Longrightarrow \left[c_j^\dagger, c_i\right]_{-\eta} = -\eta\delta_{ij}$, y entonces $c_j^\dagger c_i = -\eta\delta_{ij} + \eta c_i c_j^\dagger$. [2]

$$\eta^3 c_i^\dagger (-\eta\delta_{ij} + \eta c_i c_j^\dagger) c_k + \delta_{ik} c_j^\dagger c_i = \eta^4 c_i^\dagger (-\delta_{ij} + c_i c_j^\dagger) c_k + \delta_{ik} c_j^\dagger c_i = \eta^4 c_i^\dagger c_i c_j^\dagger c_k - \eta^4 \delta_{ij} c_i^\dagger c_k + \delta_{ik} c_j^\dagger c_i,$$

Como $\eta = 1$ ó $-1$, $\eta^4 = 1$ y el resultado es el mismo para bosones y fermiones. Ahora bien,

$$\delta_{ik} c_j^\dagger c_i - \delta_{ij} c_i^\dagger c_k = c_j^\dagger c_k - c_j^\dagger c_k = 0,$$

de modo que,

$$c_j^\dagger c_k c_i^\dagger c_i = c_i^\dagger c_i c_j^\dagger c_k,$$

y por lo tanto $[N, T] = 0$.

Analicemos ahora el conmutador $[N, V]$,

$$[N, V] = \left[\sum_i c_i^\dagger c_i, \frac{1}{2} \sum_{jklm} \langle jk \,|V|\, lm\rangle\, c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l\right] = \frac{1}{2} \sum_{ijklm} \langle jk \,|V|\, lm\rangle \left[c_i^\dagger c_i, c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l\right].$$

Para que ambos operadores conmuten debe ser,

$$\left[c_i^\dagger c_i, c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l\right] = c_i^\dagger c_i c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l - c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l c_i^\dagger c_i = 0.$$

Al igual que arriba, veamos que el segundo término es igual al primero transponiendo operadores según las reglas de conmutación/anticomnmutación. Primero llevemos $c_i^\dagger$ adelante,

$$c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l c_i^\dagger c_i = c_j^\dagger c_k^\dagger c_m \left(\delta_{il} + \eta c_i^\dagger c_l\right) c_i = \eta c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i^\dagger c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i = \eta c_j^\dagger c_k^\dagger \left(\delta_{im} + \eta c_i^\dagger c_m\right) c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i =$$

$$= \eta^2 c_j^\dagger c_k^\dagger c_i^\dagger c_m c_l c_i + \eta \delta_{im} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i.$$

Ahora transponemos $c_i^\dagger$ con $c_k^\dagger$ y luego con $c_j^\dagger$, esto hace aparecer dos nuevos factores $\eta$, y el operador $c_i^\dagger$ queda al frente,

$$\eta^4 c_i^\dagger c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l c_i + \eta \delta_{im} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i.$$

Ahora llevemos el operador $c_i$ adelante. En primer lugar lo transponemos con los operadores

[2] De manera más general, $[B, A]_{-\eta} = BA - \eta AB = -\eta\,[A, B]_{-\eta} \Longrightarrow BA = -\eta\,[A, B]_{-\eta} + \eta AB$, si se aplicamos este resultado al producto $c_j^\dagger c_i$, teniendo en cuenta que $\left[c_i, c_j^\dagger\right]_{-\eta} = \delta_{ij}$, resulta $c_j^\dagger c_i = -\eta\delta_{ij} + \eta c_i c_j^\dagger$.

$c_l$ y $c_i$, lo que saca dos factores $\eta$,

$$\eta^6 c_i^\dagger c_j^\dagger c_k^\dagger c_i c_m c_l + \eta\delta_{im} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i,$$

como $\eta^6 = 1$ no lo escribimos en el siguiente paso,

$$c_i^\dagger c_j^\dagger c_k^\dagger c_i c_m c_l + \eta\delta_{im} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i = c_i^\dagger c_j^\dagger(-\eta\delta_{ik} + \eta c_i c_k^\dagger) c_m c_l + \eta\delta_{im} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i =$$

$$= \eta c_i^\dagger c_j^\dagger c_i c_k^\dagger c_m c_l - \eta\delta_{ik} c_i^\dagger c_j^\dagger c_m c_l + \eta\delta_{im} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i =$$

$$= \eta c_i^\dagger(-\eta\delta_{ij} + \eta c_i c_j^\dagger) c_k^\dagger c_m c_l - \eta\delta_{ik} c_i^\dagger c_j^\dagger c_m c_l + \eta\delta_{im} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i =$$

$$= \eta^2 c_i^\dagger c_i c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l - \eta^2\delta_{ij} c_i^\dagger c_k^\dagger c_m c_l - \eta\delta_{ik} c_i^\dagger c_j^\dagger c_m c_l + \eta\delta_{im} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i =$$

$$= c_i^\dagger c_i c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l - \delta_{ij} c_i^\dagger c_k^\dagger c_m c_l - \eta\delta_{ik} c_i^\dagger c_j^\dagger c_m c_l + \eta\delta_{im} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i$$

Veamos ahora que los términos con deltas de Kronecker suman cero,

$$-\delta_{ij} c_i^\dagger c_k^\dagger c_m c_l - \eta\delta_{ik} c_i^\dagger c_j^\dagger c_m c_l + \eta\delta_{im} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_i + \delta_{il} c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_i =$$

$$-c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l - \eta c_k^\dagger c_j^\dagger c_m c_l + \eta c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_m + c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l$$

El primer y el cuarto término se cancelan quedando,

$$-\eta c_k^\dagger c_j^\dagger c_m c_l + \eta c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_m = -\eta^2 c_j^\dagger c_k^\dagger c_m c_l + \eta c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_m = -\eta^3 c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_m + \eta c_j^\dagger c_k^\dagger c_l c_m,$$

como $\eta^3 = \eta$ ambos términos se cancelan. Por lo tanto, $[N, V] = 0$.

De este modo hemos demostrado que $[N, H] = 0$ tanto en el caso bósonico como el fermiónico. El hamiltoniano de Schrödinger no cambia el número de partículas.